Метрология и стандартизация

Лекция № 8. Статистические гипотезы и их проверка. Проверка гипотез о равенстве дисперсий выборок. Критерий Фишера, Вартлетта, Кохрана.

Цель и результаты обучения

Цель: научить проверять статистические гипотезы о равенстве дисперсий и средних, а также сравнивать среднее со стандартным образцом.

РО 3 · ИД 3.1

Проверяет гипотезы критериями Фишера, Бартлетта, Кохрана, Стьюдента и u при заданном β.

РО 3 · ИД 3.2–3.3

Сопоставляет наблюдаемое и критическое значения; оценивает воспроизводимость, сходимость и смещение относительно образца a_0.

РО 4 · ИД 4.2

Делает выводы о равноточности серий и допустимости объединения выборок для средневзвешенной $\bar{s}^2$.

Статистические гипотезы

Статистическая гипотеза

Предположение о виде распределения или о значениях его параметров

H_0 и H_1

H_0 — нулевая (проверяемая) гипотеза;
H_1 — конкурирующая, противоречащая H_0

Области критерия

Критическая область — значения, при которых H_0 отвергают; остальные — область принятия

H_0 можно отвергнуть или не отвергнуть; доказать H_0 статистика не может

Алгоритм проверки гипотезы

1. Сформулировать H_0 и H_1
2. Выбрать критерий и уровень значимости β
3. Вычислить наблюдаемое значение критерия
4. Найти критическое значение по таблице
5. Сравнить и сделать вывод

Вывод

Наблюдаемое значение в критической области → H_0 отвергают

Иначе — нет оснований отвергнуть H_0

Уровень значимости и виды ошибок

Ошибка I рода

Отвергнута верная H_0

Вероятность равна β (обычно 0,05; 0,01)

Ошибка II рода

Не отвергнута ложная H_0

Уменьшается с ростом n

Односторонняя область — при H_1: «>» или «<»

Двусторонняя область — при H_1: «≠», в каждом хвосте $\beta/2$

Критерий Фишера (F)

Статистика

$F = s^2_б / s^2_м$

$f_1 = n_б - 1, f_2 = n_м - 1$

H_0: D(X) = D(Y)

Правило

$F < F_{кр}(\beta; f_1, f_2)$ — нет оснований отвергнуть H_0 (дисперсии однородны)

$F \geq F_{кр}$ — различие значимо

Пример: $s_1^2 = 0{,}040$ (n = 8), $s_2^2 = 0{,}016$ (n = 6)

$F = 2{,}5 < F_{кр}(0{,}05; 7; 5) = 4{,}88 \rightarrow$ дисперсии однородны

Критерий Бартлетта

Для k дисперсий (выборки разного объёма)

$$B = V / C$$

$$V = f \cdot \ln \bar{s}^2 - \Sigma f_i \cdot \ln s_i^2, \quad \bar{s}^2 = \Sigma f_i \cdot s_i^2 / f$$

$$C = 1 + [\Sigma(1/f_i) - 1/f] / (3(k - 1)), \quad f = \Sigma f_i$$

$B < \chi^2_кр(\beta; k - 1)$ — нет оснований отвергнуть H_0; $B \geq \chi^2_кр$ — дисперсии различаются, объединять выборки нельзя

Критерий Кохрана (G)

Статистика

$G = s^2_{max} / \Sigma s_i^2$

равные n; $f = n - 1$

l — число выборок

Если однородны

$\bar{s}^2 = \Sigma f_i \cdot s_i^2 / \Sigma f_i$

$G < G_{кр}(\beta; f, l)$ — однородны. Пример: $l = 4$, $f = 5$: $G = 0{,}026/0{,}059 = 0{,}44 < 0{,}5895$

Сравнение двух средних: u-критерий

Статистика (σ известны или n, m велики)

$U = (\bar{x} - \bar{y}) / \sqrt{(\sigma^2_x/n + \sigma^2_y/m)}$

Критическая точка

H_1: ≠ — $\Phi(u_кр) = (1 - \beta)/2$

H_1: M(X) > M(Y) — $\Phi(u_кр) = (1 - 2\beta)/2$

|U| < u_кр (при H_1: ≠) или U < u_кр (при H_1: «>») — нет оснований отвергнуть H_0. При β = 0,05: u_кр = 1,96 и 1,645

Сравнение двух средних: t-критерий

Статистика

$$T = (\bar{x} - \bar{y}) / (s_p \cdot \sqrt{(1/n + 1/m)})$$

$$s_p^2 = [(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2] / (n+m-2)$$

$$f = n + m - 2$$

Условия и правило

Нормальность и равные дисперсии (сначала критерий Фишера)

$|T| < t_{кр}(\beta, f)$ — нет оснований отвергнуть H_0

При «>» сравнивают T с t односторонним

Пример: n = m = 6, T = 1,88 < t(0,05; 10) = 2,23 — различие средних незначимо

Сравнение со стандартным образцом

σ известна

$U = (\bar{x} - a_0)\cdot\sqrt{n} / \sigma$

$|U| > u_{кр} \rightarrow$ смещение

σ неизвестна (малая выборка)

$T = (\bar{x} - a_0)\cdot\sqrt{n} / s,\ f = n - 1$

$|T| > t_{кр} \rightarrow$ смещение

Пример: $a_0 = 5{,}00;\ n = 6;\ \bar{x} = 5{,}08;\ s = 0{,}07$

$T = 0{,}08\cdot\sqrt{6} / 0{,}07 = 2{,}80 > t(0{,}05;\ 5) = 2{,}57 \rightarrow$ систематическое смещение значимо

Справочные таблицы: F и t

F_кр, β = 0,05 (f_1 — по столбцам)

f_2 \ f_1	3	5	7	10
5	5,41	5,05	4,88	4,74
6	4,76	4,39	4,21	4,06
8	4,07	3,69	3,50	3,35
10	3,71	3,33	3,14	2,98

t_кр, двусторонняя область

f \ β	0,10	0,05	0,01
4	2,13	2,78	4,60
5	2,01	2,57	4,03
9	1,83	2,26	3,25
10	1,81	2,23	3,17

Полные таблицы — в справочнике; односторонняя β соответствует двусторонней 2β

Справочные таблицы: χ^2 и Кохрана

χ^2_кр (верхняя точка)

f \ β	0,05	0,01
2	6,0	9,2
5	11,1	15,1
9	16,9	21,7

G_кр, β = 0,05

l \ f	1	3	5
3	0,9669	0,7977	0,7071
4	0,9065	0,6841	0,5895
5	0,8412	0,5981	0,5063

Для Бартлетта берут χ^2_кр(β; k − 1) из верхнего хвоста, для Кохрана — G_кр(β; f, l)

Проверка гипотез в нормативной системе РК

Стандартные образцы

Сравнение с СО утверждённого типа — оценка смещения (Закон № 53-II)

СТ РК ISO/IEC 17025

Лаборатория обеспечивает достоверность результатов: контроль качества, сравнения

ISO 5725-2

Повторяемость и воспроизводимость; критерии Кохрана и Граббса

F-, t-, G-критерии — инструмент контроля сходимости, воспроизводимости и правильности

Заключение

1. Гипотезы проверяют сравнением наблюдаемого значения критерия с критическим при заданном β.

2. Сначала проверяют однородность дисперсий (Фишер, Бартлетт, Кохран), затем сравнивают средние (u, t).

3. Сравнение со стандартным образцом выявляет систематическое смещение методики.

Вопросы для самопроверки

1. Определите гипотезу, H_0, H_1, критическую область, β.
2. Алгоритм проверки; односторонняя и двусторонняя области.
3. Критерий Фишера: F, f_1 и f_2.
4. Отличие критериев Бартлетта и Кохрана по условиям применения.
5. Как вычисляют средневзвешенную $\bar{s}^2$ при однородности?
6. Формулы T и U для равенства двух средних.
7. Число степеней свободы при сравнении двух малых выборок.
8. Проверка правильности методики по стандартному образцу при известном и неизвестном σ.

Список источников

Нормативные

1. Закон РК от 7 июня 2000 г. № 53-II «Об обеспечении единства измерений» (по состоянию на 25.08.2026).
2. СТ РК ISO/IEC 17025. Общие требования к компетентности испытательных и калибровочных лабораторий.
3. ISO 5725-2 (СТ РК ИСО 5725-2). Точность методов и результатов измерений. Ч. 2.
4. ISO 2854. Statistical interpretation of data — Techniques of estimation and tests relating to means and variances.
5. JCGM 100:2008 (GUM).

Учебная литература

6. Козлова Т. Н. Основы метрологии, стандартизации и сертификации. — СПб.: Лань, 2022.
7. Сергеев А. Г., Терегеря В. В. Метрология, стандартизация и сертификация. — М.: Юрайт, 2023.
8. Кремер Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Юрайт, 2024.
9. Метрология и измерения / под ред. И. И. Акимова. — Алматы: КазНУ, 2020.