Метрология и стандартизация

Лекция № 6. Точечная и интервальная оценки параметров распределения. Доверительный интервал и доверительная вероятность

Цель и результаты обучения

Цель: научить оценивать параметры распределения по ограниченной выборке и строить доверительные интервалы для среднего и СКО при $\gamma = 0{,}90;\ 0{,}95;\ 0{,}99$.

РО 1

ИД 1.2 — объясняет понятия: генеральная совокупность, выборка, объём, размах, репрезентативность, точечная и интервальная оценки, доверительная вероятность.

РО 5

ИД 5.1 — использует оценки $\bar{x}$ и s.

ИД 5.2 — строит доверительные интервалы для среднего (u или t) и для σ (χ^2).

РО 5

ИД 5.3 — обосновывает недопустимость замены распределения Стьюдента нормальным на малых выборках.

Генеральная совокупность и выборка

Наблюдение

Один отсчёт; его значение — результат наблюдения

Генеральная совокупность

Все значения, которые величина может принять

Выборка

Конечный ряд $x_1, x_2, \ldots, x_n$; n — объём выборки

Ранжированная выборка: $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$

Размах выборки: $R = x_max - x_min$

Репрезентативность выборки

Репрезентативная выборка

Достаточно полно отражает свойства генеральной совокупности

Точность оценок растёт с n — только если выборка случайна, без систематического смещения

Способы отбора

- простой случайный
- типический
- механический
- серийный

Точечная и интервальная оценки

Точечная оценка

$$\bar{x} = (1/n)\,\Sigma x_i$$

$$s^2 = \Sigma(x_i - \bar{x})^2 / (n - 1)$$

$$s(\bar{x}) = s/\sqrt{n}$$

Интервальная оценка

Два числа — границы интервала:

$$P(\bar{x} - \Delta < a < \bar{x} + \Delta) = \gamma$$

γ — доверительная вероятность (коэффициент надёжности). Интервал, построенный по случайной выборке, накрывает неизвестное a с вероятностью γ

Доверительный интервал для среднего

σ известно или n > 50

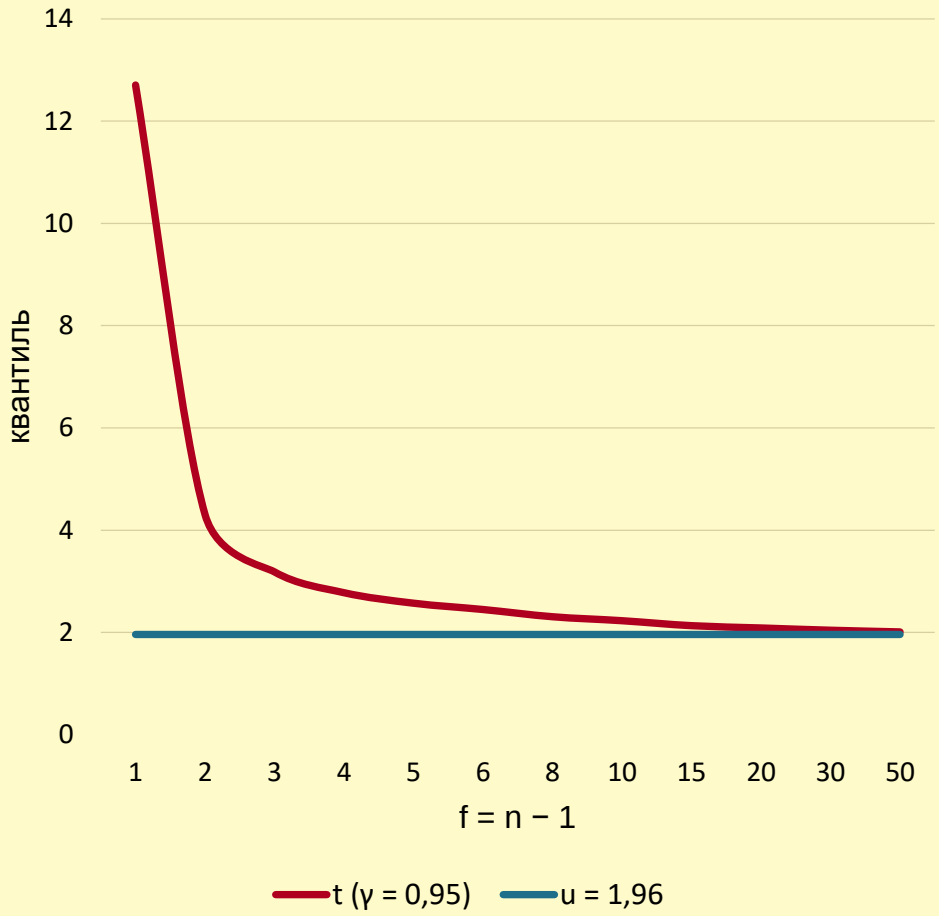
$$\bar{x} \pm u \cdot \sigma / \sqrt{n}$$

σ неизвестно, n мало

$$\bar{x} \pm t \cdot s / \sqrt{n}, \quad f = n - 1$$

γ	f = 4	f = 9	f = 19	f → ∞ (u)
0,90	2,13	1,83	1,73	1,645
0,95	2,78	2,26	2,09	1,960
0,99	4,60	3,25	2,86	2,576

Стьюдент или нормальный закон



Вывод

При малых n интервал по Стьюденту шире нормального

Замена t на u занижает погрешность

При n > 50 различие мало

От чего зависит ширина интервала

1

γ растёт

Интервал шире. Обычно γ = 0,90; 0,95; 0,99

2

n растёт

Интервал уже: $\Delta \propto 1/\sqrt{n}$; вдвое уже при n в 4 раза больше

3

s растёт

Интервал шире: $\Delta \propto s$

$$\Delta = t(\gamma, f) \cdot s / \sqrt{n}$$

Пример: доверительный интервал для среднего

Дано

$n = 10$, $f = 9$

$\bar{x} = 10{,}00$ мм

$s = 0{,}12$ мм

$\gamma = 0{,}95$

Решение

$t(0{,}95;\ 9) = 2{,}262$

$\Delta = 2{,}262 \cdot 0{,}12 / \sqrt{10} \approx 0{,}086$ мм

$a = 10{,}00 \pm 0{,}09$ мм, $\gamma = 0{,}95$

При $u = 1{,}96$ было бы 0,074 — занижено

Доверительный интервал для СКО

Формула ($f = n - 1$)

$s \cdot \sqrt{(f/\chi^2_1)} < \sigma < s \cdot \sqrt{(f/\chi^2_2)}$, где χ^2_1 — квантиль уровня $(1+\gamma)/2$, χ^2_2 — уровня $(1-\gamma)/2$

Пример: $n = 10$, $s = 0{,}12$, $\gamma = 0{,}95$

$0{,}083 < \sigma < 0{,}219$ мм

Интервал несимметричен относительно s; требуется нормальность данных

Оценка неопределённости в РК

Тип А

Статистическая оценка по ряду наблюдений: u_A = s/√n

Расширенная U

U = k·u; при малом f коэффициент k берут из t-распределения

Документы

Протоколы испытаний и сертификаты калибровки — с неопределённостью и уровнем доверия

Основа в РК: Закон № 53-II «Об обеспечении единства измерений», СТ РК ISO/IEC 17025, GUM

Заключение

1. Результат измерения — точечная оценка плюс доверительный интервал с указанием γ.

2. При малых n границы строят по Стьюденту; для σ — по χ^2. Замена на нормальный закон занижает погрешность.

3. Эти расчёты — основа протоколов испытаний и оценки неопределённости.

Вопросы для самопроверки

1. Что такое генеральная совокупность, выборка, объём, размах?
2. Какая выборка репрезентативна? Способы отбора.
3. Чем точечная оценка отличается от интервальной? Формулы $\bar{x}$ и s^2.
4. Что такое доверительный интервал и γ? Типичные значения γ.
5. Запишите интервал для среднего при $n > 50$ и при малом n.
6. Почему интервал по Стьюденту шире нормального?
7. Как ширина интервала зависит от γ и n?
8. Запишите интервал для σ. Какой закон используется?

Список источников

Нормативные

1. Закон РК от 7 июня 2000 г. № 53-II «Об обеспечении единства измерений» (по состоянию на 25.08.2026).
2. JCGM 100:2008 (GUM). Руководство по выражению неопределённости измерения.
3. СТ РК ISO/IEC 17025. Общие требования к компетентности испытательных и калибровочных лабораторий.
4. ISO 3534-1. Statistics — Vocabulary and symbols.

Учебная литература

5. Козлова Т. Н. Основы метрологии, стандартизации и сертификации. — СПб.: Лань, 2022.
6. Сергеев А. Г., Терегеря В. В. Метрология, стандартизация и сертификация. — М.: Юрайт, 2023.
7. Кремер Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Юрайт, 2024.