Метрология и стандартизация

Лекция № 5. Виды распределения. Нормальный закон. Функция Лапласа. Распределения Стьюдента и Пирсона

Цель и результаты обучения

В соответствии с силлабусом дисциплины по итогам изучения темы обучающийся должен достичь следующих результатов обучения:

Цель: освоить нормальный закон и функцию Лапласа, понять роль центральной предельной теоремы, познакомиться с распределениями χ^2 Пирсона и Стьюдента.

РО 1

ИД 1.2 — объясняет закон Гаусса, ЦПТ, нормированное отклонение u, Φ(u), χ^2, t, число степеней свободы f.

ИД 1.3 — систематизирует плотности и влияние параметров a, σ, f.

РО 3

ИД 3.1 — закладывает базу проверки гипотез по свойствам χ^2 и t.

ИД 3.2 — оценивает форму χ^2 и t при росте f.

РО 5

ИД 5.1 — использует Φ(u) и t-распределение для вероятности попадания результата в интервал, в том числе при малой выборке $2 < n < 20$.

Нормальный закон: почему он главный

В соответствии с силлабусом дисциплины по итогам изучения темы обучающийся должен достичь следующих результатов обучения:

1

Предельный закон

К нему приближаются суммы многих независимых слагаемых — основание ЦПТ

2

Основная модель

Нормальную модель погрешности принимают по умолчанию в практике измерений

3

Но не всегда

Реальные погрешности бывают равномерными, асимметричными, с тяжёлыми «хвостами»: согласие проверяют

Нормальный закон — модель, а не закон природы: её применимость подтверждают, а не предполагают

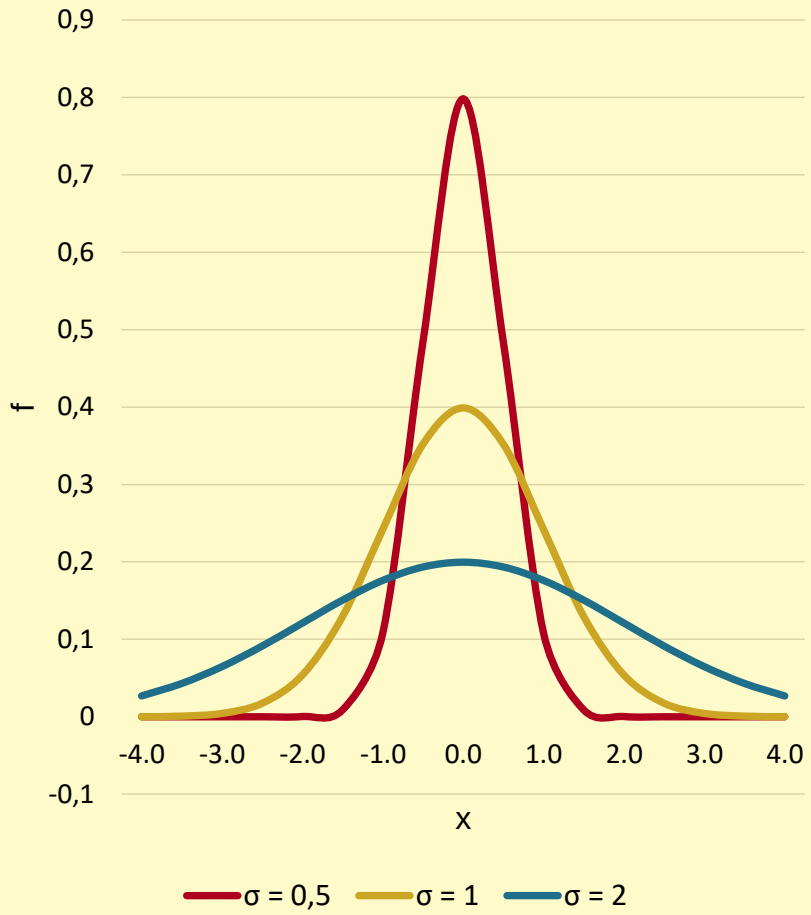
Нормальное распределение Гаусса

В соответствии с силлабусом дисциплины по итогам изучения темы обучающийся должен достичь следующих результатов обучения:

Плотность

$$f(x) = 1/(\sigma\sqrt{(2\pi)}) \cdot e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}$$

- a = M(X) — центр, сдвигает кривую
- σ — СКО: чем больше σ, тем ниже и шире кривая
- Площадь под кривой равна 1



Центральная предельная теорема

В соответствии с силлабусом дисциплины по итогам изучения темы обучающийся должен достичь следующих результатов обучения:

Теорема (Ляпунов)

Сумма большого числа независимых случайных величин, вклад каждой из которых мал, имеет распределение, близкое к нормальному

Для погрешностей

Случайная погрешность близка к нормальной, если её формирует много независимых факторов и среди них нет доминирующего

Одна доминирующая составляющая (например, округление отсчёта) — закон может быть не нормальным

Функция Лапласа

В соответствии с силлабусом дисциплины по итогам изучения темы обучающийся должен достичь следующих результатов обучения:

Нормирование

$$u = (x - a)/\sigma$$

a = 0, σ = 1 — стандартное нормальное распределение

Функция Лапласа

$$\Phi(u) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_0^u e^{-t^2/2}\, dt$$

Φ(−u) = −Φ(u); Φ(∞) = 0,5

$$P(x_1 \le X < x_2) = \Phi((x_2 - a)/\sigma) - \Phi((x_1 - a)/\sigma)$$

$$P(|X - a| < k\sigma) = 2\Phi(k)$$

Правило «k сигм» и пример

В соответствии с силлабусом дисциплины по итогам изучения темы обучающийся должен достичь следующих результатов обучения:

Интервал	Вероятность
$a \pm \sigma$	0,683
$a \pm 2\sigma$	0,954
$a \pm 3\sigma$	0,997

Пример

$a = 10{,}0;\ \sigma = 0{,}2$

$P(9{,}8 < X < 10{,}4)$

$u_1 = -1,\ u_2 = 2$

$P = \Phi(2) + \Phi(1) = 0{,}4772 + 0{,}3413 \approx 0{,}82$

Вероятность выхода за $a \pm 3\sigma$ — около 0,3 %

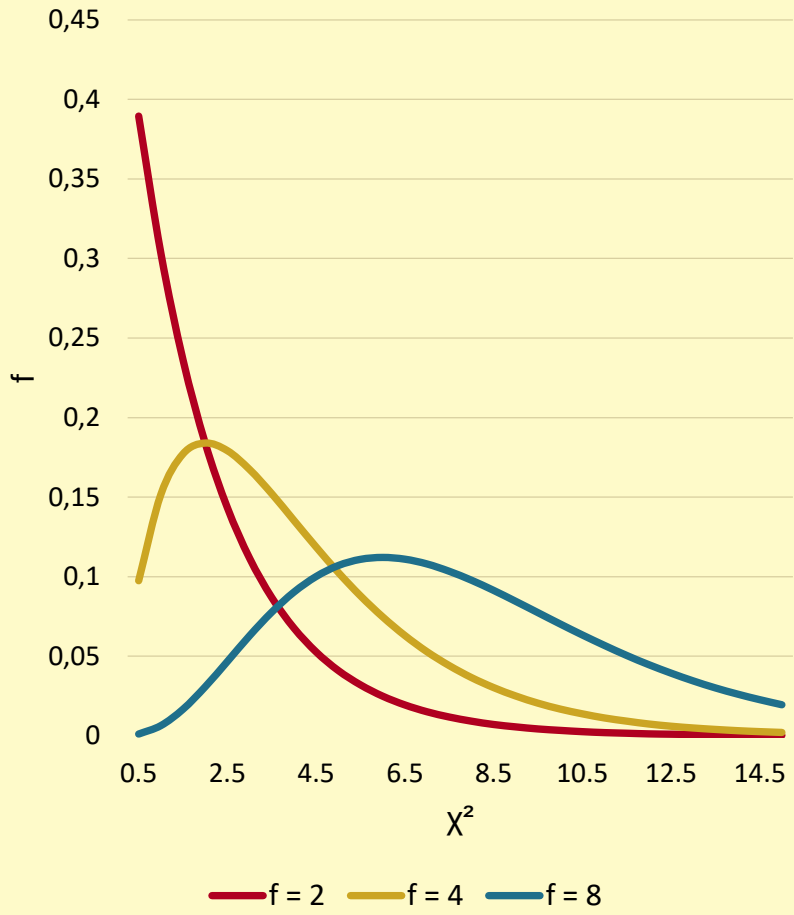
Распределение χ^2 Пирсона

В соответствии с силлабусом дисциплины по итогам изучения темы обучающийся должен достичь следующих результатов обучения:

Определение

$$\chi^2 = u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_f^2$$

- u_i — независимые стандартные нормальные величины
- M = f, D = 2f
- Кривые асимметричны; асимметрия убывает с ростом f
- $(n - 1)s^2/\sigma^2 \sim \chi^2$ при $f = n - 1$



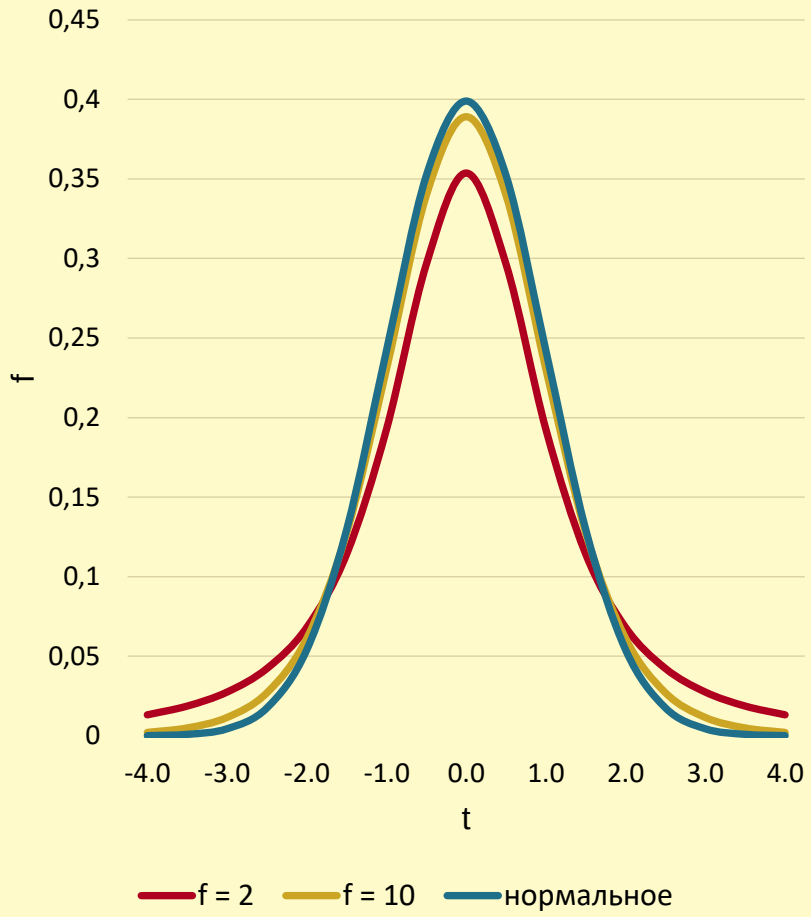
Распределение Стьюдента и малые выборки

В соответствии с силлабусом дисциплины по итогам изучения темы обучающийся должен достичь следующих результатов обучения:

Определение

$$t = u / \sqrt{(\chi^2/f)}$$

- Для среднего: $t = (\bar{x} - a)/s(\bar{x})$, $f = n - 1$
- Симметрично, «хвосты» тяжелее нормальных
- При больших f близко к нормальному
- Малые выборки $2 < n < 20$ — микростатистика



Сравнение законов

В соответствии с силлабусом дисциплины по итогам изучения темы обучающийся должен достичь следующих результатов обучения:

Закон	Параметры	Форма	Применение
Гаусса	a, σ	симметричный	случайные погрешности
Стьюдента	f = n − 1	симметричный, тяжёлые хвосты	доверительные интервалы при малых n
χ^2 Пирсона	f	асимметричный, x ≥ 0	оценка дисперсии, критерии согласия

При больших f законы t и χ^2 приближаются к нормальному

Нормальный закон в нормативной системе РК

В соответствии с силлабусом дисциплины по итогам изучения темы обучающийся должен достичь следующих результатов обучения:

Рассеяние

Закон № 53-II, ст. 1: параметр, характеризующий рассеяние значений величины

Охват

U = k·u; k = 2 — около 95 % при нормальном законе

Малые n

При малом числе степеней свободы k берут из t-распределения (GUM)

Лаборатории: СТ РК ISO/IEC 17025 требует оценивать неопределённость измерений

Заключение

В соответствии с силлабусом дисциплины по итогам изучения темы обучающийся должен достичь следующих результатов обучения:

1. Нормальный закон — основная модель случайной погрешности благодаря ЦПТ; Ф(u) даёт вероятности попадания в интервал.

2. При малых выборках используют распределение Стьюдента, для дисперсий — χ^2 Пирсона.

3. Далее: доверительные интервалы, грубые промахи, проверка гипотез.

Вопросы для самопроверки

В соответствии с силлабусом дисциплины по итогам изучения темы обучающийся должен достичь следующих результатов обучения:

1. Запишите плотность закона Гаусса; как влияют a и σ на кривую?
2. Сформулируйте ЦПТ. Когда погрешности близки к нормальным?
3. Что такое стандартное нормальное распределение и нормированное отклонение u?
4. Определите Φ(u). Как найти $P(x_1 \le X < x_2)$?
5. Дайте определение χ^2 Пирсона. Как меняется форма при росте f?
6. Почему при $2 < n < 20$ используют распределение Стьюдента?
7. Сравните плотности нормального закона и Стьюдента при разных f.
8. Что даёт правило «k сигм»? Чему равны вероятности для k = 1, 2, 3?

Список источников

В соответствии с силлабусом дисциплины по итогам изучения темы обучающийся должен достичь следующих результатов обучения:

Нормативные

1. Закон РК от 7 июня 2000 г. № 53-II «Об обеспечении единства измерений» (по состоянию на 25.08.2026).
2. JCGM 100:2008 (GUM). Руководство по выражению неопределённости измерения.
3. ISO 2602. Statistical interpretation of test results — Estimation of the mean — Confidence interval.
4. ISO 3534-1. Statistics — Vocabulary and symbols. Probability and general statistical terms.
5. СТ РК ISO/IEC 17025. Общие требования к компетентности испытательных и калибровочных лабораторий.

Учебная литература

6. Козлова Т. Н. Основы метрологии, стандартизации и сертификации. — СПб.: Лань, 2022.
7. Сергеев А. Г., Терегеря В. В. Метрология, стандартизация и сертификация. — М.: Юрайт, 2023.
8. Кремер Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Юрайт, 2024.
9. Метрология и измерения / под ред. И. И. Акимова. — Алматы: КазНУ, 2020.