Метрология и стандартизация

Лекция № 9. Проверка нормальности распределения. $\chi 2$ критерий. Составной критерий

Цель и результаты обучения

Цель: научить проверять гипотезу о нормальном распределении результатов измерений критерием χ^2 Пирсона, составным критерием и по асимметрии и эксцессу.

РО 3 · ИД 3.1

Проверяет нормальность: χ^2 Пирсона, составной критерий, A и E.

РО 3 · ИД 3.2–3.3

Сопоставляет гистограмму и кривую; выбирает критерий по объёму n.

РО 5 · ИД 5.1, 5.3

Считает $\bar{x}$, s, m и m′, A, E; объединяет малочисленные интервалы, $\Sigma P_i = 1$, $f = r - 3$.

Зачем проверять нормальность и чем

H_0: результаты измерений распределены нормально. **H_1:** не нормально.

От этого зависит применимость t-, F-критериев и правила 3σ.

n > 40–50

Критерий χ^2 Пирсона

11 (15) < n ≤ 50

Составной критерий (два условия одновременно)

Малое n

A и E — ориентировочно; при n < 11 (15) нормальность не проверяют

Не отвергнуть H_0 не значит доказать нормальность

Критерий χ^2: шаги 1–4

1. Разбить диапазон x_min…x_max на r интервалов шириной Δx_i; подсчитать частоты m_i
2. Построить гистограмму: $p^*_i = m_i / (n \cdot \Delta x_i)$; площадь всех столбцов равна 1
3. Найти $\bar{x}$ и s по исходным данным (s — с делителем $n - 1$)
4. Нормировать границы: $u_i = (x_i - \bar{x})/s$; крайние интервалы: $-\infty$ и $+\infty$

Критерий χ^2: шаги 5–8

5. $P_i = \Phi(u_{i+1}) - \Phi(u_i)$; $\Sigma P_i = 1$
6. Теоретические частоты: $m'_i = n \cdot P_i$; при $m'_i < 5$ интервалы объединяют
7. $\chi^2_набл = \Sigma\, (m_i - m'_i)^2 / m'_i$
8. $f = r - 3$; находят $\chi^2_кр(\beta; f)$

Вывод

$\chi^2_набл < \chi^2_кр$ — нет оснований отвергнуть H_0

$\chi^2_набл \geq \chi^2_кр$ — нормальность отвергают

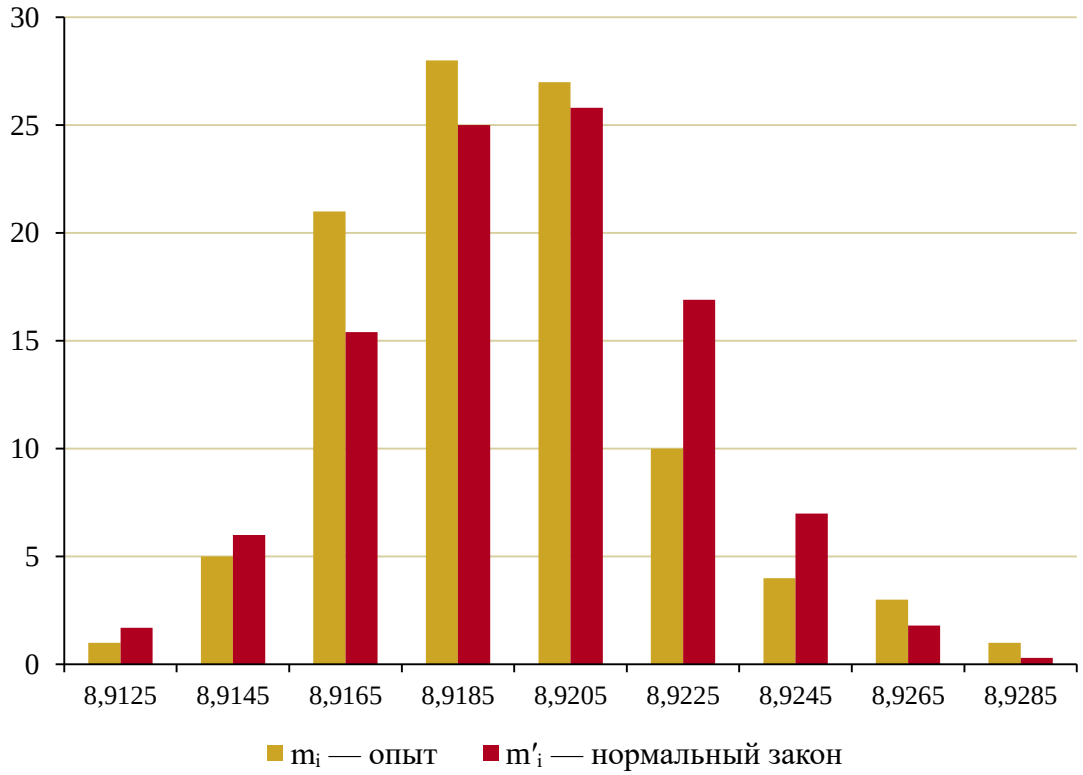
Пример: данные и теоретические частоты

n = 100

$\bar{x}$ = 8,9196

s = 0,00290

r = 9 интервалов, Δx = 0,002



Расхождение гистограммы и кривой случайно или значимо? Решает χ^2

Пример: вычисление χ^2

Интервал	m_i	m'_i	$(m - m')^2/m'$
1–2 (объед.)	6	7,70	0,38
3	21	15,36	2,07
4	28	25,02	0,36
5	27	25,83	0,05
6	10	16,90	2,82
7–9 (объед.)	8	9,19	0,15
Σ	100	100,00	5,83

$f = 6 - 3 = 3$; $\chi^2_набл = 5{,}83 < \chi^2_кр(0{,}05; 3) = 7{,}81$ → нет оснований отвергнуть нормальность

Составной критерий ($11 < n \leq 50$)

Критерий 1

$\mathbf{d = \Sigma|x_i - \bar{x}| / (n \cdot S^*)}$

$\mathbf{d_1 < d < d_2}$ **— выполнен**

S* — с делителем n

Критерий 2

Число разностей $|x_i - \bar{x}|$, превышающих $z \cdot S$, не больше допустимого m

z и m — по таблице для n и P

Нормальность не отвергают, только если выполнены оба критерия

Критерий по асимметрии и эксцессу

Оценки

$A = m_3 / m_2^{3/2}$

$E = m_4 / m_2^2 - 3$

$m_k = \Sigma(x_i - \bar{x})^k / n$

Критерий

$|A| \le 3\sqrt{D(A)}$

$|E + 6/(n+1)| \le 5\sqrt{D(E)}$

$D(A) = 6(n-2) / ((n+1)(n+3))$

$D(E) = 24n(n-2)(n-3) / ((n+1)^2(n+3)(n+5))$

Для нормального закона A = 0, E = 0

Пример: A и E при n = 12

Данные

$n = 12$; $\bar{x} = 2{,}458$

$\hat{\sigma} = 0{,}161$ (делитель n)

$A = 0{,}091$

$E = -1{,}24$

$D(A) = 0{,}308$; $D(E) = 0{,}601$

Проверка

$|A| = 0{,}091 \le 3\sqrt{D(A)} = 1{,}66$

$|E + 6/13| = 0{,}78 \le 5\sqrt{D(E)} = 3{,}88$

Оба неравенства выполнены: нет оснований отвергнуть нормальность (при n = 12 — осторожно)

Проверка нормальности в системе РК

ISO 5479

Проверка отклонения распределения от нормального (при наличии СТ РК — применять его)

СТ РК ISO/IEC 17025

Обоснованность статистических методов обработки данных лаборатории

Закон № 53-II

Достоверность и единство измерений

Перед t-, F-критериями и правилом 3σ — проверка нормальности и запись результата

Заключение

1. Нормальность проверяют до применения параметрических критериев.

2. Выбор критерия по n: χ^2 Пирсона — большие выборки, составной критерий — средние, A и E — малые (ориентировочно).

3. Нет оснований отвергнуть H_0 — не доказательство нормальности.

Вопросы для самопроверки

1. Зачем проверять нормальность перед t- и F-критериями?
2. Как выбирают критерий в зависимости от n?
3. Алгоритм χ^2 Пирсона; чему равна площадь гистограммы?
4. Почему крайние интервалы идут до $\mp\infty$ и когда интервалы объединяют?
5. Запишите χ^2_набл и правило решения; чему равно f?
6. Два условия составного критерия.
7. Формулы A и E; их значения для нормального закона.
8. Критерий по A, E и их дисперсиям.

Список источников

Нормативные

1. Закон РК от 7 июня 2000 г. № 53-II «Об обеспечении единства измерений» (по состоянию на 25.08.2026).
2. СТ РК ISO/IEC 17025. Общие требования к компетентности испытательных и калибровочных лабораторий.
3. ISO 5479. Statistical interpretation of data — Tests for departure from the normal distribution.
4. JCGM 100:2008 (GUM).

Учебная литература

5. Козлова Т. Н. Основы метрологии, стандартизации и сертификации. — СПб.: Лань, 2022.
6. Сергеев А. Г., Терегеря В. В. Метрология, стандартизация и сертификация. — М.: Юрайт, 2023.
7. Кремер Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Юрайт, 2024.
8. Метрология и измерения / под ред. И. И. Акимова. — Алматы: КазНУ, 2020.