Метрология и стандартизация

Лекция № 4. Закон распределения случайной величины

Цель и результаты обучения

Цель: освоить способы задания закона распределения, функцию распределения F(x) и плотность f(x); находить вероятность попадания результата или погрешности в интервал.

РО 1. Понятия и законы

ИД 1.2 — объясняет закон распределения, многоугольник распределения, F(x), f(x), нормировку.

ИД 1.3 — систематизирует способы задания законов и свойства F(x) и f(x).

РО 5. Обработка данных

ИД 5.1 — находит вероятность попадания результата или погрешности в интервал.

ИД 5.3 — проверяет функции распределения по неотрицательности, монотонности и нормировке.

Закон распределения случайной величины

1

Табличный

Ряд: значения x_i и вероятности p_i

2

Аналитический

Формула $p_i = f(x_i)$

3

Графический

Многоугольник распределения: точки $(x_i; p_i)$

Закон распределения связывает значения случайной величины с их вероятностями; для дискретной величины $\Sigma p_i = 1$

Пример: дискретная величина

x_i	1	2	3
p_i	0,2	0,5	0,3

$\Sigma p_i = 1$ — условие нормировки выполнено

x	$x \le 1$	$1 < x \le 2$	$2 < x \le 3$	$x > 3$
F(x)	0	0,2	0,7	1

F(x) ступенчатая: в точке x_i скачок равен p_i

Функция распределения F(x)

Определение

$$F(x) = P(X < x)$$

x — текущее значение (аргумент), а не результат опыта

Универсальность

Существует для любых случайных величин — дискретных и непрерывных. Плотность есть только у непрерывных

Допустима запись $F(x) = P(X \le x)$: для непрерывных величин различий нет

Свойства функции распределения

Свойство	**Смысл**
$F(x_2) \geq F(x_1)$ при $x_2 > x_1$	не убывает
$0 \leq F(x) \leq 1$; $F(-\infty) = 0$; $F(+\infty) = 1$	вероятность; нормировка
$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$	попадание в интервал
Дискретная — ступенчатая; **непрерывная — непрерывная**	у непрерывной $P(X = x) = 0$

Плотность распределения f(x)

Связь с F(x)

$f(x) = F'(x)$

$F(x) = \int f(t)\,dt$

(t от $-\infty$ до x)

Свойства

$f(x) \geq 0$

$\int f(x)\,dx = 1$ по всей оси

f — не вероятность, может быть больше 1

$P(X = x) = 0$; вероятность — площадь под кривой

Плотность и центр распределения

Центр распределения

Мода совпадает с M(X) только для симметричных одномодальных законов, например нормального

Погрешность θ

f(x) центрирована в $x_и$ + θ, а f(δ) — в θ; при θ = 0 центр f(δ) — нуль

Максимум плотности указывает на истинное значение лишь при симметрии закона и θ = 0

Вероятность попадания в интервал

$$P(\delta_1 < \delta \le \delta_2) = \int f(\delta)\, d\delta = F(\delta_2) - F(\delta_1)$$

Интеграл — от δ_1 до δ_2: площадь под кривой плотности между границами

Нормировка

$$\int f(x)\, dx = 1$$

Доверительная вероятность

$$P(|\delta| \le \Delta) = P$$

Пример: погрешность округления

Условие

Показание цифрового прибора округлено до единицы младшего разряда. Погрешность δ распределена равномерно на отрезке $[-0{,}5;\ 0{,}5]$

Результат

$f(\delta) = 1;\ \ F(\delta) = \delta + 0{,}5$

$P(-0{,}2 < \delta \le 0{,}3) = F(0{,}3) - F(-0{,}2) = 0{,}8 - 0{,}3 = 0{,}5$

$\sigma = 1/\sqrt{12} \approx 0{,}29$

Законы распределения в нормативной системе РК

Неопределённость

Закон № 53-II, ст. 1: параметр, характеризующий рассеяние значений; рассеяние описывает закон распределения

Метод Монте-Карло

JCGM 101: расчёт неопределённости без допущения о нормальности закона

Лаборатории

СТ РК ISO/IEC 17025: оценка неопределённости в калибровке и испытаниях

Равномерный закон: неопределённость типа B по разрешению СИ $u = a/\sqrt{3}$, a — полуширина

Заключение

1. $F(x) = P(X < x)$ описывает любые случайные величины, плотность $f(x) = F'(x)$ — только непрерывные.

2. Вероятность попадания в интервал — разность значений F или площадь под кривой f.

3. Далее: нормальное распределение, распределения Стьюдента и Пирсона, доверительные интервалы.

Вопросы для самопроверки

1. Что такое закон распределения? Какому условию удовлетворяют вероятности дискретной величины?
2. Назовите три способа задания закона дискретной величины. Что такое многоугольник распределения?
3. Что такое $F(x)$? Чем $P(X < x)$ отличается от $P(X = x)$?
4. Назовите свойства $F(x)$. Почему у дискретной величины она ступенчатая?
5. Дайте определение плотности $f(x)$. Как она связана с $F(x)$?
6. Назовите свойства плотности. В чём смысл условия нормировки?
7. Когда максимум плотности соответствует истинному значению?
8. Запишите вероятность попадания погрешности δ в интервал $(\delta_1; \delta_2]$ через F и через f.

Список источников

Нормативные

1. Закон РК от 7 июня 2000 г. № 53-II «Об обеспечении единства измерений» (по состоянию на 25.08.2026).
2. JCGM 100:2008 (GUM). Руководство по выражению неопределённости измерения.
3. JCGM 101:2008. Supplement 1 to the GUM: propagation of distributions using a Monte Carlo method.
4. СТ РК ISO/IEC 17025. Общие требования к компетентности испытательных и калибровочных лабораторий.

Учебная литература

5. Козлова Т. Н. Основы метрологии, стандартизации и сертификации. — СПб.: Лань, 2022.
6. Сергеев А. Г., Терегеря В. В. Метрология, стандартизация и сертификация. — М.: Юрайт, 2023.
7. Кремер Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Юрайт, 2024.
8. Метрология и измерения / под ред. И. И. Акимова. — Алматы: КазНУ, 2020.