Метрология и стандартизация

Лекция № 3. Параметры распределения случайной величины. Математическое ожидание. Дисперсия. Начальные и центральные моменты

Цель и результаты обучения

Цель: освоить числовые характеристики случайных величин — центр, рассеяние, форму распределения — и закон больших чисел как основу обработки результатов измерений.

РО 1. Понятия и законы

ИД 1.2 — объясняет M(X), D(X), σ, моменты, закон больших чисел.

ИД 1.3 — систематизирует формулы параметров для дискретных и непрерывных величин и их свойства.

РО 5. Обработка данных

ИД 5.1 — использует выборочные оценки положения и рассеяния для выводов о точности.

ИД 5.3 — проверяет расчёты по свойствам характеристик и условию нормировки.

Зачем нужны числовые характеристики

1

F(x) и f(x)

Полное описание закона распределения, но на практике часто избыточно

2

Числовые характеристики

Кратко описывают центр, рассеяние и форму распределения

3

Моменты

Общий способ их задать: начальные и центральные

Математическое ожидание

Дискретная величина

$$M(X) = \Sigma\, x_i \cdot p_i$$

$p_i = P(X = x_i)$, $\Sigma p_i = 1$

Непрерывная величина

$$M(X) = \int x \cdot f(x)\, dx$$

по всей оси; интеграл сходится абсолютно

M(X) — центр распределения. Для результатов измерений $M(X) = x_и + \theta$, где θ — систематическая погрешность: M(X) оценивает истинное значение, только если $\theta = 0$

Свойства математического ожидания

$M(C) = C$	C — константа
$M(X + C) = M(X) + C$	всегда
$M(CX) = C \cdot M(X)$	всегда
$M(X + Y) = M(X) + M(Y)$	всегда
$M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$	**только для независимых X и Y**

Закон больших чисел

Теорема Чебышева

$$P(|\bar{x}_n - M(X)| < \varepsilon) \to 1 \text{ при } n \to \infty$$

Измерения независимы, M(X) одно и то же, D(X) конечна

Неравенство Чебышева

$$P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) \leq D(X) / \varepsilon^2$$

Оценка вероятности отклонения через дисперсию

Среднее арифметическое — случайная величина; с ростом n оно сходится по вероятности к M(X), а не становится ему равным

Дисперсия и СКО

Определение

$D(X) = M[(X - M)^2]$

Дискретная:

$\Sigma(x_i - M)^2 \cdot p_i$

Непрерывная:

$\int (x - M)^2 \cdot f(x)\, dx$

Расчёт и СКО

$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$

$\sigma = \sqrt{D(X)}$

σ — в единицах X,

D — в квадрате единиц

Свойства дисперсии

$D(C) = 0$	константа не рассеивается
$D(X + C) = D(X)$	сдвиг не меняет рассеяние
$D(CX) = C^2 \cdot D(X)$	масштаб: $\sigma(CX) = \lvert C \rvert \cdot \sigma$
$D(X + Y) = D(X) + D(Y)$	**только для независимых; иначе + $2cov(X, Y)$**

Пример расчёта

x_i	p_i
1	**0,2**
2	**0,5**
3	**0,3**

$\Sigma p_i = 1$ — условие нормировки

Результат

$M(X) = 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}5 + 3 \cdot 0{,}3 = 2{,}1$

$M(X^2) = 0{,}2 + 2{,}0 + 2{,}7 = 4{,}9$

$D(X) = 4{,}9 - 2{,}1^2 = 0{,}49$

$\sigma = 0{,}7$

Начальные и центральные моменты

k	Начальный α_k	Центральный μ_k	Смысл
0	1	1	нормировка
1	M(X)	0	центр
2	$M(X^2)$	$D(X) = \sigma^2$	рассеяние
3	—	μ_3	асимметрия $A = \mu_3 / \sigma^3$
4	—	μ_4	эксцесс $E = \mu_4 / \sigma^4 - 3$

Начальные моменты — от нуля, центральные — от M(X). Для нормального распределения A = 0 и E = 0.

Выборочные оценки по n измерениям

$M(X)$	$\bar{x} = \Sigma x_i / n$	несмещённая
$D(X)$	$s^2 = \Sigma(x_i - \bar{x})^2 / (n - 1)$	деление на n занижает оценку
σ	$s = \sqrt{s^2}$	мало смещена при малых n
$D(\bar{x})$	$D(X) / n$, откуда $s(\bar{x}) = s / \sqrt{n}$	следует из свойств D для независимых

Параметры распределения в нормативной системе РК

Неопределённость

Закон № 53-II, ст. 1: параметр, характеризующий рассеяние значений величины. Тип А оценивают через $s(\bar{x})$

Методики

Сходимость и воспроизводимость по ISO 5725 — при разработке и аттестации методик (ст. 1, 12)

Лаборатории

СТ РК ISO/IEC 17025: контроль достоверности результатов, в том числе статистическими методами

Дисперсия и СКО — основа показателей точности в нормативных документах

Заключение

1. M(X) задаёт центр, D(X) и σ — рассеяние, моменты 3-го и 4-го порядков — форму распределения.

2. Среднее по n измерениям сходится по вероятности к M(X); $s(\bar{x})$ убывает как $1/\sqrt{n}$.

3. Далее: нормальное распределение, проверка нормальности, интервальное оценивание.

Вопросы для самопроверки

1. Зачем вместо полной функции распределения используют числовые характеристики?
2. Запишите M(X) для дискретной и непрерывной величин. В чём её метрологический смысл?
3. Назовите свойства M(X). При каком условии M(XY) = M(X)·M(Y)?
4. В чём суть закона больших чисел для многократных равноточных измерений?
5. Запишите D(X) и расчётную формулу. Чем σ отличается от D?
6. Назовите свойства D(X). Когда D(X + Y) = D(X) + D(Y)?
7. Чем начальные моменты отличаются от центральных?
8. Что описывают моменты 3-го и 4-го порядков? Как вычисляют A и E?

Список источников

Нормативные

1. Закон РК от 7 июня 2000 г. № 53-II «Об обеспечении единства измерений» (по состоянию на 25.08.2026).
2. ISO 5725-1. Accuracy (trueness and precision) of measurement methods and results.
3. JCGM 100:2008 (GUM). Руководство по выражению неопределённости измерения.
4. СТ РК ISO/IEC 17025. Общие требования к компетентности испытательных и калибровочных лабораторий.

Учебная литература

5. Козлова Т. Н. Основы метрологии, стандартизации и сертификации. — СПб.: Лань, 2022.
6. Сергеев А. Г., Терегеря В. В. Метрология, стандартизация и сертификация. — М.: Юрайт, 2023.
7. Кремер Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Юрайт, 2024.
8. Метрология и измерения / под ред. И. И. Акимова. — Алматы: КазНУ, 2020.