Лекция 14 «Элементы теории нечетких множеств»

Автор: д.т.н Джомартова Ш.А.

Примеры применения нечеткой логики

- Автоматическое управление воротами плотины на гидроэлектростанциях
- Упрощенное управление роботами
- Наведение телекамер при трансляции спортивных событий
- Эффективное и стабильное управление автомобильными двигателями
- Управление экономичной скоростью автомобилей *(Nissan, Subaru)*
- Оптимизированное планирование автобусных расписаний *(Toshiba)*
- Системы архивации документов *(Mitsubishi Elec.)*
- Системы прогнозирования землетрясений(*Japan)*

Примеры применения нечеткой логики

- Диагностика рака *(Kawasaki Medical School)*
- Распознавание рукописных символов в карманных компьютерах (записных книжках) *(Sony)*
- Однокнопочное управление стиральными машинами *(Matsushita, Hitatchi)*
- Распознавание рукописных текстов, объектов, голоса *(CSK, Hitachi, Hosai Univ., Ricoh)*
- Управление метрополитенами для повышения удобства вождения, точности остановки и экономии энергии (*Hitachi)*
- Оптимизация потребления бензина в автомобилях

- Впервые термин нечеткая логика (fuzzy logic) был введен амерканским профессором **Лотфи Заде** в 1965 году в работе “Нечеткие множества” в журнале “Информатика и управление”.



Родился в Баку, Азербайджан как **Лотфи Алескерзаде** (или **Аскер Заде**) от русской матери и отца азербайджанца иранского происхождения; с 1932 года жил в Иране, учился Тегеранском университете; с 1944 в Соединенных Штатах; работал в Калифорнийском университете (Беркли). Умер в 2017 г.

$\mu^A(x)$

Основные определения

- ***Опр.*** Пусть $X=\{x\}$ – универсальное множество, т.е. полное множество, охватывающее всю проблемную область. **Нечеткое множество** A есть набор пар

$$\left\{(x, \mu^A(x)) \mid x \in X, \mu^A : X \to [0,1]\right\}$$

где $\mu^A(x)$ – **функция принадлежности** которая является субъективной мерой соответствия элемента нечеткому множеству. Принимает значение от нуля (абсолютная непринадлежность) до единицы (абсолютная принадлежность) элемента x к A.

- Если множество A определено на конечном универсальном множестве $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ то его удобно обозначать

$$A = \mu^A(x_1) \mid x_1 + \ldots + \mu^A(x_n) \mid x_n = \sum_{i=1}^{n} \mu^A(x_i) \mid x_i$$

где пара $\mu^A(x_i) \mid x_i$ – называется **синглтоном.**

Пример

Пусть X={1,2,….10}. Тогда нечеткое множество «большие числа» может быть представлено как A=«большие числа»= 0.2|6+0.5|7+0.8|8+1|9+1|10. Это следует понимать: 9 и 10 с абсолютной уверенностью относятся к «большим числам», 8 есть большее со степенью 0.8 и т.д. 1,2,…,5 абсолютно не являются большими.

Свойства нечетких множеств

1. Нечеткое множество $A \subseteq X$ **пустое**, если

$$\mu^A(x) = 0 \qquad \forall x \in X$$

2. Нечеткие множества *A* и *B* **эквивалентны**, если

$$\mu^A(x) = \mu^B(x) \qquad \forall x \in X$$

3. Нечеткое множество $A \subseteq X$ является **подмножеством** нечеткого множества $B \subseteq X$ если

$$\mu^A(x) \leq \mu^B(x) \quad \forall x \in X$$

Пример. Пусть X={1,2,3}

A=0.3|1+0.2|2+1|3,

B=0.4|1+0.6|2+1|3

Следовательно

$$A \subseteq B$$

4. Кардинальное число (**мощность**) нечеткого множества находится следующим образом

$$cardA = |A| = \sum_{i=1}^{n} \mu^{A}(x_i)$$

Пример. Пусть X={1,2,3,4}. Если A=0.1|1+0.4|2+0.7|3+1|4, то $cardA$=2.2

Операции над нечеткими множествами

1. Дополнением нечеткого множества A называют нечеткое множество $\neg A$, функция принадлежности которого равна

$$\mu^{\neg A}(x) = 1 - \mu^{A}(x), \forall x \in X$$

2. Пересечением двух нечетких множеств A и B называют нечеткое множество $A \cap B$
функция принадлежности которого равна , где $\wedge$ – знак операции минимума.

$$\mu^{A \cap B}(x) = \mu^{A}(x) \wedge \mu^{B}(x), \forall x \in X$$

3. Объединением двух нечетких множеств A и B называют нечеткое множество $A \cup B$, функция принадлежности которого равна

$$\mu^{A \cup B}(x) = \mu^{A}(x) \vee \mu^{B}(x), \forall x \in X$$

где $\vee$ – знак операции максимума.

Пример. Пусть X={1,2,…,10}.

A= «малые числа»=1|1+1|2+0.8|3+0.5|4+0.3|5+0.1|6;

B=«большие числа» = 0.1|5 + 0.2|6 + 0.5|7 + 0.8|8 +1|9+ +1|10;

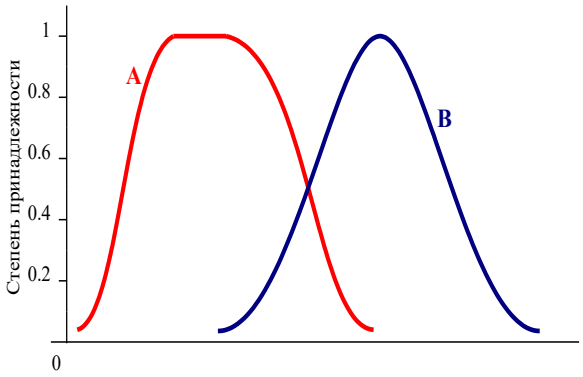
Тогда $\neg A$ = «не малые числа» = 0.2|3 + +0.5|4 + +0.7|5+0.9|6+1|7+1|8+1|9+1|10;

$A \cap B$ =«малые числа И большие числа»= 0.1|5+0.1|6;

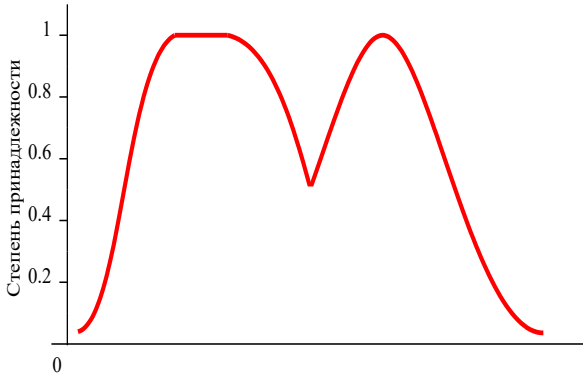
$A \cup B$ = «малые числа ИЛИ большие числа»=1|1+1|2+0.8|3+ +0.5|4+0.3|5+0.2|6+0.5|7+0.8|8+1|9++1|10.

Основные операции над нечеткими множествами

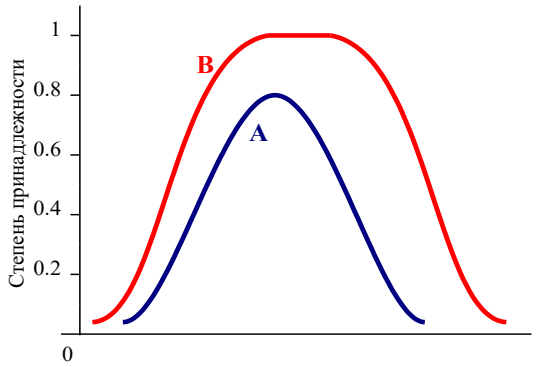
Нечеткие множества A и B



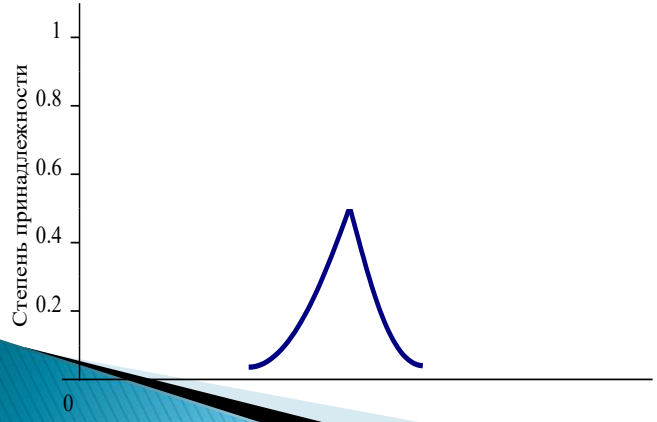
Объединение $A \cup B$



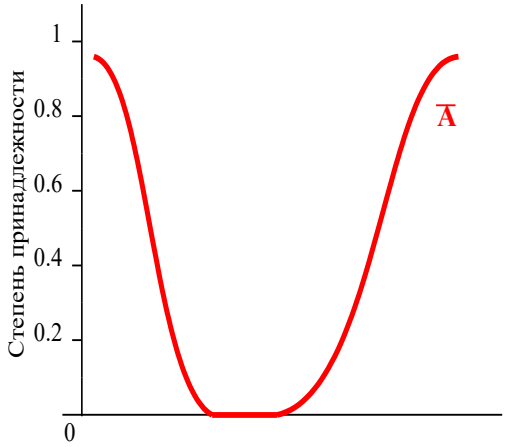
$A \subseteq B$



Пересечение $A \cap B$



Дополнение множества A



Нечеткие числа

- **Нечеткое число** $\tilde{A}$ – это нечеткий набор, характеризуемый функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{A}} : R \to [0,1]$$

Применение нечетких множеств в задачах принятия решения в условиях определенности

Пусть имеется множество альтернатив

Тогда определим критерий как нечеткое множество $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$

$$C = \{\mu_C(a_1) \mid a_1, ..., \mu_C(a_m) \mid a_m\} \qquad \mu_C(a_i) \in [0,1]$$

Пусть имеется критериев $C_1, ..., C_n$. Тогда лучшая альтернатива будет та, которая удовлетворяет C_1 и C_2 и т.д. C_n . т.е. это $D = C_1 \cap C_2 \cap ... \cap C_n$, что соответствует

$$\mu_D(a_j) = \min_{i=\overline{1,n}} \mu_{C_i}(a_j),\ j = \overline{1,m}$$

- В качестве лучшей альтернативы выбирается та у которой наибольшая функция принадлежности

$$\mu_D(a^*) = \max_{j=1,m} \mu_D(a_j)$$

Если C_i имеют различную важность, каждому из них приписывается число $\alpha_i \geq 0$ (чем важнее критерий, тем больше α_i), следовательно

$$D = C_1^{\alpha_1} \cap C_2^{\alpha_2} \cap \ldots \cap C_n^{\alpha_n}$$

$$\alpha_i \geq 0, i = \overline{1,n}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$$

Коэффициенты определяются методами парных сравнений

Относительная важность C_i и C_j	b_{ij}
Равная важность	1
Немного важнее	3
Важнее	5
Заметно важнее	7
Намного важнее	9
Промежуточные значения	2,4,6,8

b_{ij}

строится матрица B, где $b_{ii} = 1, b_{ij} = 1/b_{ij}$
Находим собственный вектор B:

$$Bw = \lambda \max w$$

Тогда искомые

$$\alpha_i = nw_i$$

Пример

Обозначим a_1 –главный инженер;
a_2 –директор малого предприятия;
a_3 –сотрудник НИИ; a_4 – зам.директора;
a_5 – инженер.

Критерии
C_1 – профессиональные навыки,
C_2 – организационные способности,
C_3 – опыт работы,
C_4 – авторитет,
C_5 – умение работать с людьми,
C_6 – возраст.

Получим множества:

$$C_1 = \{0.9 \mid a_1; 0.9 \mid a_2; 0.6 \mid a_3; 0.8 \mid a_4; 0.5 \mid a_5\}$$
$$C_2 = \{0.8 \mid a_1; 0.2 \mid a_2; 0.5 \mid a_3; 0.7 \mid a_4; 0.6 \mid a_5\}$$
$$C_3 = \{0.7 \mid a_1; 0.9 \mid a_2; 0.8 \mid a_3; 0.5 \mid a_4; 0.3 \mid a_5\}$$
$$C_4 = \{0.9 \mid a_1; 0.8 \mid a_2; 0.5 \mid a_3; 0.6 \mid a_4; 0.5 \mid a_5\}$$
$$C_5 = \{0.9 \mid a_1; 0.9 \mid a_2; 0.4 \mid a_3; 0.7 \mid a_4; 0.6 \mid a_5\}$$
$$C_6 = \{0.9 \mid a_1; 0.4 \mid a_2; 0.8 \mid a_3; 0.7 \mid a_4; 0.5 \mid a_5\}$$

Тогда правило выбора имеет вид

$$D = \left\{ \begin{array}{l} \min(0.9;0.8;0.7;0.9;0.9;0.9) \mid a_1; \min(0.9;0.9;0.9;0.8;0.9;0.4) \mid a_2; \\ \min(0.6;0.5;0.8;0.5;0.4;0.8) \mid a_3; \min(0.8;0.7;0.5;0.6;0.7;0.7) \mid a_4; \\ \min(0.5;0.6;0.3;0.5;0.6;0.4) \mid a_5 \end{array} \right\} =$$

$$= \{0.7 \mid a_1; 0.4 \mid a_2; 0.4 \mid a_3; 0.5 \mid a_4; 0.3 \mid a_5\}$$

- Следовательно лучший вариант является a_1 – главный инженер.

Пример. Критерий различной важности.

- Выбор места строительства. Критерии C_1 – близость к потребителю; C_2 – близость к источникам сырья; C_3 – наличие свободной рабочей силы.
- Пусть a_1, a_2, a_3, a_4 – предполагаемые места строек.

$$C_1 = \{0.5 \mid a_1; 0.7 \mid a_2; 0.3 \mid a_3; 0.6 \mid a_4\}$$
$$C_2 = \{0.5 \mid a_1; 0.4 \mid a_2; 0.8 \mid a_3; 0.4 \mid a_4\}$$
$$C_3 = \{0.2 \mid a_1; 0.1 \mid a_2; 0.6 \mid a_3; 0.9 \mid a_4\}$$

$$B = \begin{array}{c|ccc} & C_1 & C_2 & C_3 \\ C_1 & 1 & 5 & 1/3 \\ C_2 & 1/5 & 1 & 1/9 \\ C_3 & 3 & 9 & 1 \end{array}$$

$$w_1 = 0.06, w_2 = 0.27, w_3 = 0.67$$

$$\alpha_1 = 3 \cdot 0.06 = 0.18$$
$$\alpha_2 = 3 \cdot 0.27 = 0.81$$
$$\alpha_3 = 3 \cdot 0.67 = 2.01$$

Модифицируем

$$C_1^{0.18} = \left\{0.5^{0.18} \mid a_1; 0.7^{0.18} \mid a_2; 0.3^{0.18} \mid a_3; 0.6^{0.18} \mid a_4\right\} =$$
$$= \left\{0.88 \mid a_1; 0.94 \mid a_2; 0.81 \mid a_3; 0.91 \mid a_4\right\}$$

$$C_2^{0.81} = \left\{0.57 \mid a_1; 0.48 \mid a_2; 0.83 \mid a_3; 0.48 \mid a_4\right\}$$

$$C_3^{2.01} = \left\{0.04 \mid a_1; 0.01 \mid a_2; 0.36 \mid a_3; 0.81 \mid a_4\right\}$$

$$D = \left\{0.04 \mid a_1; 0.01 \mid a_2; 0.36 \mid a_3; 0.48 \mid a_4\right\}$$

Приложения нечеткой логики

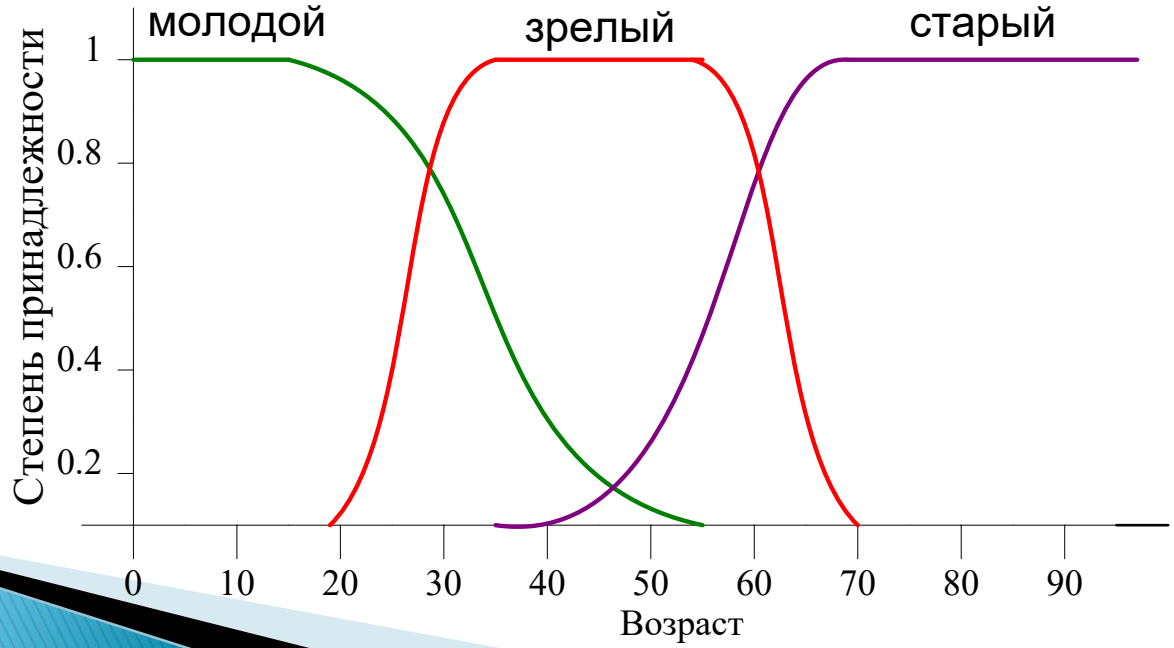
Использование нечеткого управления рекомендуется…

- для очень сложных процессов, когда не существует простой математической модели
- для нелинейных процессов высоких порядков
- если должна производиться обработка (лингвистически сформулированных) экспертных знаний

- Современные интеллектуальные системы базируются на **нечеткой логике** при принятии решений и адаптации к изменяющимся условиям среды
- Основа нечеткой логики - **нечеткие множества** и **нечеткие правила**
- В классической теории множеств рассматриваются **множества с четкой границей:**

- **Нечеткое множество:** $A = \{x \mid x \geq 0\}$
  - не имеет четкой границы,
  - характеризуется функцией принадлежности,
  - позволяют моделировать часто используемые лингвистические выражения
  - **Примеры:**
    - Высокий рост
    - Близко
    - Погода холодная
- Нечеткость множеств проистекает из неопределенной и неточной природы понятий и выражений естественных языков

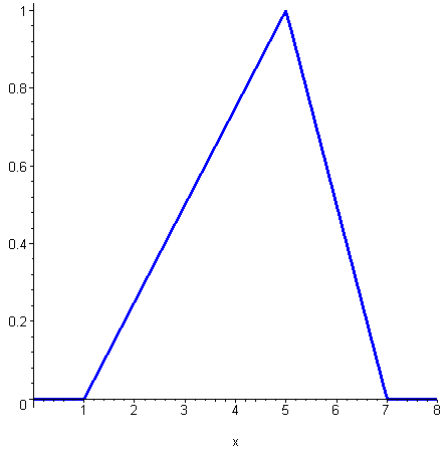
- **Характерные свойства** нечетких множеств:
  - **субъективность:** функции принадлежности могут определяться разными людьми по-разному в зависимости от их опыта, образования, типа задачи;
  - **неслучайность:** для разных субъектов выбор того или иного значения меры принадлежности неслучаен
- **Пример:** нечеткие множества «молодой», «зрелый» и «старый» (возраст)



Типичные одномерные функции принадлежности

- **Треугольная** функция принадлежности

$$\mu_A(x;\, a,\, b,\, c) = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b, \\ \dfrac{c-x}{c-b}, & b \le x \le c, \\ 0, & x \ge c. \end{cases} \qquad (a < b < c)$$

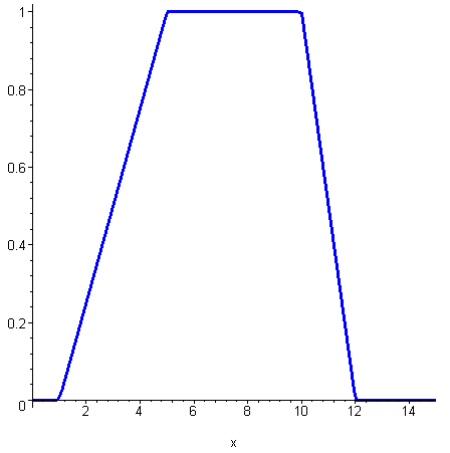


$$\mu_A(x;\, a,\, b,\, c) = \max\left\{\min\left(\frac{x-a}{b-a},\, \frac{c-x}{c-b}\right),\, 0\right\}$$

или

$$\mu_A(x;\, a,\, b,\, c,\, d) = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b, \\ 1, & b \le x \le c, \\ \dfrac{d-x}{d-c}, & c \le x \le d, \\ 0, & x \ge d. \end{cases} \qquad (a < b < c < d)$$

- **Трапециевидная** функция принадлежности

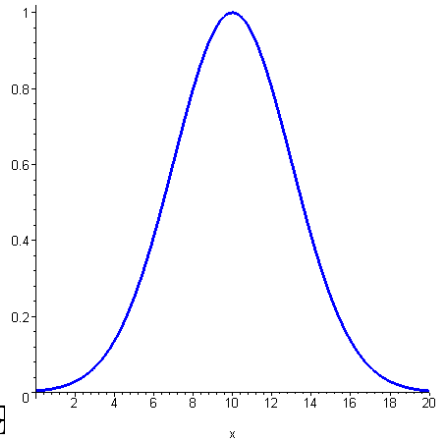


$$\mu_A(x;\, a,\, b,\, c,\, d) = \max\left\{\min\left(\frac{x-a}{b-a},\, 1,\, \frac{d-x}{d-c}\right),\, 0\right\}$$

Значения функций просто вычислить, поэтому он
используются в *системах реального времени*

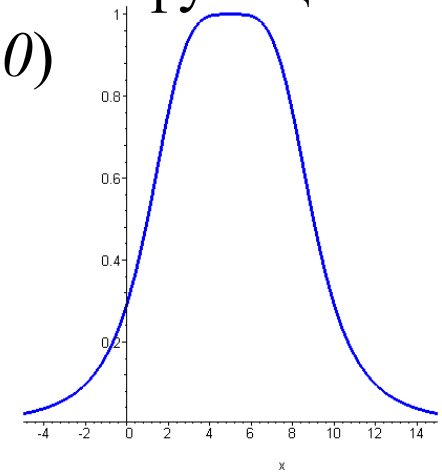
- **Гауссова** функция принадлежности

$$\mu_A(x;\, a,\, \sigma) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2}$$



- **Обобщенная колоколообразная** функция принадлежности (обычно $b>0$)

$$\mu_A(x;\, a,\, b,\, c) = \frac{1}{1+\left|\frac{x-c}{a}\right|^{2b}}$$

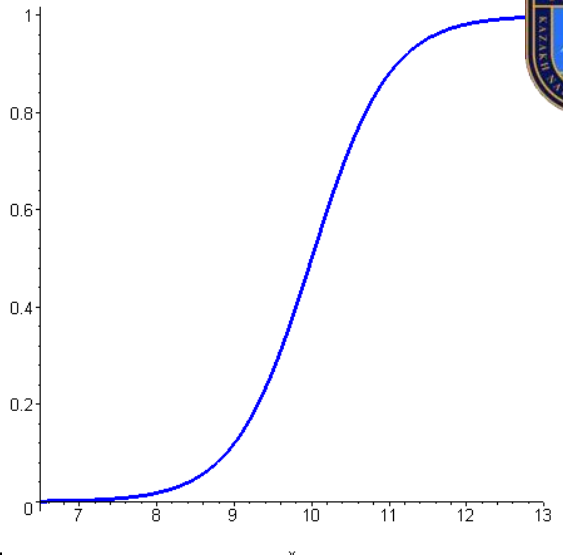


- Функции имеют непрерывные производные, которые могут использоваться как параметры **скорости обучения**

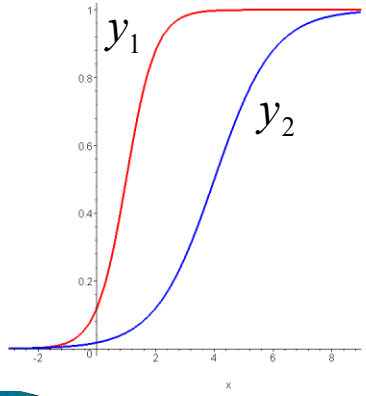
- **Сигмоидальная**

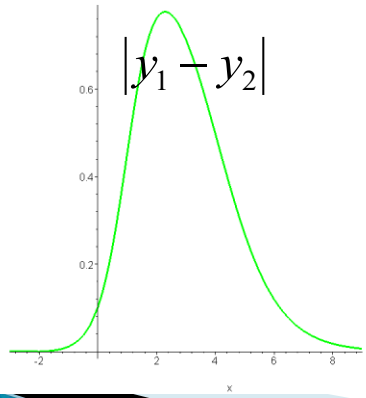
функция принадлежности

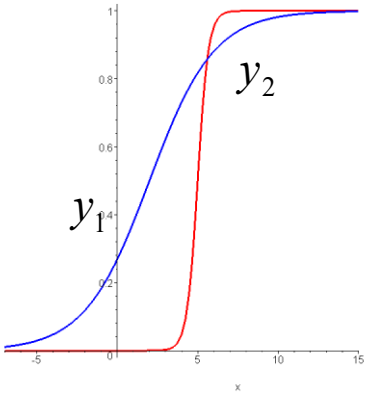
$$\mu_A(x;\, a,\, c) = \frac{1}{1 + e^{-a(x-c)}}$$

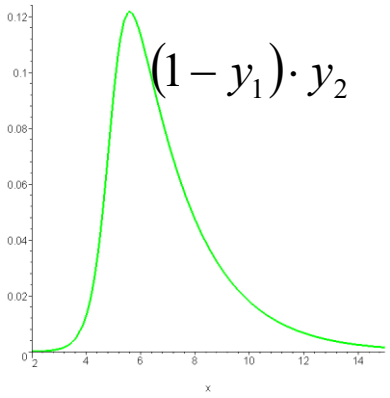


- Построение **несимметричных закрытых принадлежности** с помощью сигмоидальных функций









Построение функции принадлежности на основе парных сравнений

$$\tilde{X} = \{\mu_X(x)/x\}, x \in U$$

$$\sum_i \mu_X(x_i) = 1$$

$$M = \|m_{ij}\|, i, j = \overline{1, N}$$

Число m_{ij} показывает, во сколько раз , по мнению эксперта,

$\mu_X(x_j)$ больше $\mu_X(x_i)$

Значение j выбирается произвольно.
Таким образом, для определения $\mu_X(x_i)$

необходимо зафиксировать произвольно выбранный столбец матрицы M и вычислить отношения .

$$\mu_X(x_i) = \frac{m_{ij}}{\sum_i m_{ij}}$$

Пример. Пусть для описания расстояния между двумя точками применяется лингвистическая переменная - “расстояние“ с множеством базовых значений

T= { малое, среднее, большое }.

Пусть базовое множество B ={1,2,3,6,8,}. Требуется определить значения функции принадлежности для терма “малое”. Опросом экспертов получена следующая матрица парных сравнений

		1	3	6	8
	1	1	5	6	7
M=	3	1/5	1	4	6
	6	1/6	¼	1	4
	8	1/7	1/6	1/4	1

mij=1/mji.

Зафиксируем первый столбец M1= 1, 1/5, 1/6, 1/7

$$\mu_X(1') = \frac{m_{11}}{\sum_i m_{i1}} = \frac{1}{1+1/5+1/6+1/7} = 0.64$$

$$\mu_X(3) = 0.16 \quad \mu_X(6) = 0.11 \quad \mu_X(8) = 0.08$$

$$\mu_X(x) = \{0.64/1, 0.16/3, 0.11/6, 0.08/8\}$$

$$M = \|m_{ij}\|, m_{ij} = 1/m_{ji}$$

$$M\vec{\omega} = \lambda\vec{\omega}$$

$$M\vec{\omega} = n\omega$$

Пример. Рассмотрим задачу оценки освещенности предметов. Освещенность поверхности определяется как количество светового потока на единицу площади. Для нахождения различий в освещенности четырех идентичных объектов в зависимости от расстояния до источника был проведен следующий эксперимент. Визуальное сравнение интенсивности освещенности проводили независимо друг от друга два эксперта.

Предметы находились на следующих расстояниях от источника света : 9, 15, 21, 28 единиц длины.

Шкала для определения матрицы суждений та же, что и в предыдущем варианте. Матрица парных сравнений освещенности предметов, пронумерованных в возрастающем порядке в зависимости от их близости к источнику света, для первого эксперимента имеет вид

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 9 & 15 & 21 & 28 \\
9 & 1 & 5 & 6 & 7 \\
15 & 1/5 & 1 & 4 & 6 \\
21 & 1/6 & 1/4 & 1 & 4 \\
28 & 1/7 & 1/6 & 1/4 & 1
\end{array}
$$

$M=$

$$M\vec{\omega} = \lambda\vec{\omega} \quad \text{или} \quad (M-\lambda E)\vec{\omega} = 0$$

$$\det(M-\lambda E) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 5 & 6 & 7 \\ 1/4 & 1-\lambda & 4 & 6 \\ 1/6 & 1/4 & 1-\lambda & 4 \\ 1/7 & 1/6 & 1/4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - 4\lambda^3 - 6.914\lambda - 2.175 = 0$$

$$\lambda_1 = -0.362; \lambda_2 = -0.14 + 1.305j; \lambda_3 = -0.14 - 1.305j;$$

$$\lambda_4 = 4.39$$

$$\lambda_{max} = 4.39$$

$$\begin{vmatrix} 1\text{-}4{,}39 & 5 & 6 & 7 \\ 1/5 & 1\text{-}4.39 & 4 & 6 \\ 1/6 & 1/4 & 1\text{-}4.39 & 4 \\ 1/7 & 1/6 & 1/4 & 1\text{-}4.39 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{vmatrix} = 0$$

-3.39 w1 + 5 w2 +6w3 + 7 w4 =0
1/5 w1 - 3.39 w2 + 4 w3 +6 w4 =0
1/6 w1 + 1/4 w2 - 3.39 w 3 + 4 w 4 =0
1/7 w 1 + 1/6 w 2 + 1/4 w 3 - 3.39 w 4 =0

w1 +w 2 +w3 +w4 =1,

w1 =0.619, w2 =0.235, w3 =0.101, w4 =0.0405.

- Для второго эксперта

		9	15	21	28
M=	9	1	4	6	7
	15	1/4	1	3	4
	21	1/6	1/3	1	2
	28	1/7	1/4	1/2	1

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 & 6 & 7 \\ 1/4 & 1-\lambda & 3 & 4 \\ 1/6 & 1/3 & 1-\lambda & 2 \\ 1/7 & 1/4 & 1/2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - 4\lambda^3 - 1.687\lambda - 0.133 = 0$$

$$\lambda_1 = -0.782; \lambda_2 = -0.12 + 0.645j; \lambda_3 = -0.14 - 0.645j;$$

$$\lambda_4 = 4.102$$

$$\lambda_{max} = 4.102$$

w1 =0.617, w2 =0.224, w3= 0.097, w4 =0.062.

для первого эксперта $\left| n - \lambda_{max} \right| = 0.39$

для второго — 0.102

Нечеткая логика: Прогноз погоды

- Завтра температура воздуха +5 С возможен дождь





- Это проявление нечеткой логики
- погода завтра может быть как пасмурной



- так и дождливой



- событие предсказывается с некоторой долей уверенности (рангом)

Нечетка логика: возраст человека



Нечеткая логика: чаевые в ресторане

Экспертная система: сколько дать на «чай»?

Если обслуживание плохое или еда подгоревшая,то чаевые – малые (5% от стоимости обеда)



Если обслуживание хорошее,
то чаевые – средние
(15% от стоимости обеда)



Если обслуживание отличное или еда превосходная, то чаевые – щедрые
(25% от стоимости обеда)



Нечеткая логика: безопасность судна

- Применить аппарат нечеткой логики для анализа эффективности системы управления безопасности в судоходных компаниях



Примеры для нечеткой логики

1. Нечеткая модель управления смесителем воды при принятия душа
2. Нечеткая модель управления кондиционером воздуха в помещении
3. Нечеткая модель управления контейнерным краном
4. Нечеткая модель оценивания финансовой состоятельности клиентов при предоставлении банковских кредитов
5. Нечеткая модель прогнозирования валютных цен на финансовом рынке

Спасибо за внимание!