Лекция № 10. Теория оценивания и фильтрации.

Цель лекции

Сформировать у обучающихся теоретические знания об основных принципах анализа, оценивания и фильтрации сигналов, изучить математические основы гармонического анализа, преобразования Фурье и вейвлет-преобразования. Ознакомить с методами обработки непрерывных и дискретных сигналов, способами выделения полезной информации, подавления шумов, анализа временных рядов и многомасштабного представления данных. Развить навыки понимания и применения методов спектрального и вейвлет-анализа при обработке изображений, сжатии информации и исследовании сложных динамических процессов.

План лекции

1. Понятие сигнала. Непрерывные и дискретные сигналы.
2. Основы гармонического анализа сигналов.
3. Тригонометрические ряды Фурье и интеграл Фурье.
4. Прямое и обратное преобразования Фурье.
5. Понятие фильтрации сигналов. Низкочастотные и высокочастотные фильтры.
6. Дискретные сигналы и дискретное преобразование Фурье.
7. Методы выделения полезной составляющей сигнала. Сингулярный спектральный анализ (SSA).
8. Основные понятия и история развития вейвлет-анализа.
9. Вейвлет-функции и их основные свойства.
10. Вейвлет-преобразование и многомасштабный анализ временных рядов.
11. Локальные и глобальные вейвлет-спектры.
12. Применение вейвлет-анализа для исследования нестационарных процессов.
13. Двумерное вейвлет-преобразование и обработка изображений.
14. Пространственная фильтрация и сжатие изображений.
15. Применение вейвлетов для обработки кривых и трехмерных объектов.
16. Практическое применение вейвлет-анализа в технических, научных и медицинских исследованиях.

1. Понятие сигнала. Непрерывные и дискретные сигналы

Сигналы являются основным объектом исследования в теории обработки информации, математическом моделировании и цифровых технологиях. Они используются для представления физических процессов, измеряемых величин и информации, передаваемой между техническими устройствами.

Сигнал это функция одной или нескольких переменных, которая характеризует изменение некоторой физической или информационной величины.

В общем виде сигнал можно представить функцией: $f(x)$, где x - независимая переменная, в качестве которой обычно выступает время или пространственная координата.

В зависимости от области определения различают непрерывные и дискретные сигналы.

Непрерывный сигнал - сигнал, определенный для всех значений аргумента в некотором непрерывном интервале.

Дискретный сигнал - сигнал, определенный только в отдельных точках аргумента.

Примерами сигналов являются электрическое напряжение, звуковые колебания, изменения температуры, колебания механических конструкций и временные ряды различных физических величин.

При исследовании сигналов возникает необходимость выделения полезной информации, определения частотных характеристик и устранения помех. Для решения этих задач используются методы гармонического, спектрального и вейвлет-анализа.

2. Основы гармонического анализа сигналов

Гармонический анализ представляет собой один из основных математических методов исследования сигналов.
Его главная идея заключается в представлении сложного сигнала в виде суммы элементарных гармонических колебаний.
Простейшее гармоническое колебание описывается выражением:

$$f(t) = A\cos(\omega t + \alpha),$$

где:

- A - амплитуда колебания;
- ω - угловая частота;
- α - начальная фаза;
- t - время.

Период гармонического колебания определяется зависимостью:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Многие сложные сигналы могут быть представлены суперпозицией гармонических составляющих с различными амплитудами, частотами и фазами.
Такой подход позволяет исследовать частотную структуру сигнала и определять вклад отдельных гармоник в его формирование.

3. Тригонометрические ряды Фурье и интеграл Фурье

Одним из основных инструментов гармонического анализа является ряд Фурье.
Для достаточно регулярной периодической функции, определенной на интервале *[-l,l]*, тригонометрический ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Коэффициенты a_n и b_n определяют вклад соответствующих гармонических составляющих в исходный сигнал.
Если рассматриваемый сигнал является непериодическим и определен на всей числовой оси, для его исследования используется интеграл Фурье.
Интегральное представление позволяет перейти от дискретного набора гармонических частот к непрерывному частотному спектру.
Методы Фурье широко применяются при исследовании электрических сигналов, вибраций, акустических процессов и других физических явлений.

4. Прямое и обратное преобразования Фурье

Преобразование Фурье - математическая операция, позволяющая перейти от временного или пространственного представления сигнала к его частотному представлению.
Прямое преобразование Фурье при одной из стандартных нормировок определяется выражением:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\,(t)e^{-i\omega t}\,dt.$$

Обратное преобразование Фурье позволяет восстановить исходный сигнал по его частотному представлению:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F\,(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega.$$

Преобразование Фурье позволяет определить частоты, присутствующие в сигнале, а также оценить их амплитудные характеристики.
Однако классическое преобразование Фурье не показывает непосредственно, в какие моменты времени возникают отдельные частотные составляющие.
Это ограничение особенно существенно при анализе нестационарных сигналов, частотные характеристики которых изменяются во времени.

5. Понятие фильтрации сигналов. Низкочастотные и высокочастотные фильтры

Фильтрация сигналов - процесс выделения или подавления определенных составляющих сигнала с целью получения полезной информации.
Фильтрация применяется для устранения шумов, выделения значимых частот, сглаживания данных и обнаружения характерных изменений сигнала.
В зависимости от частотных характеристик различают низкочастотные и высокочастотные фильтры.
Низкочастотный фильтр пропускает составляющие сигнала с относительно низкими частотами и подавляет высокочастотные компоненты.
Такие фильтры используются для сглаживания сигналов и уменьшения высокочастотных помех.
Высокочастотный фильтр пропускает высокочастотные составляющие и подавляет низкочастотные компоненты.
Они используются, например, для выделения резких изменений сигнала и границ объектов на изображениях.
В частотной области фильтрация описывается выражением:

$$Y(\omega) = H(\omega)F(\omega),$$

где $F(\omega)$ - спектр исходного сигнала, $H(\omega)$ - частотная характеристика фильтра, $Y(\omega)$ - спектр обработанного сигнала.
Во временной области линейная стационарная фильтрация может быть реализована с помощью операции свертки.

6. Дискретные сигналы и дискретное преобразование Фурье

При компьютерной обработке информации непрерывные сигналы преобразуются в последовательности дискретных значений.
Для исследования конечных дискретных сигналов используется дискретное преобразование Фурье (ДПФ).
Пусть задан сигнал, состоящий из *N* отсчетов:

$$x_0, x_1, \dots, x_{N-1}.$$

Дискретное преобразование Фурье определяется формулой:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \, e^{-i2\pi kn/N}, \qquad k = 0, \dots, N-1.$$

Обратное дискретное преобразование Фурье имеет вид:

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \, e^{i2\pi kn/N}.$$

ДПФ позволяет получить частотные характеристики цифрового сигнала и использовать их для последующей обработки.

Для ускорения вычислений применяется быстрое преобразование Фурье (БПФ), которое обеспечивает эффективное вычисление спектра при большом количестве отсчетов.

7. Методы выделения полезной составляющей сигнала. Сингулярный спектральный анализ

Одной из важнейших задач обработки сигналов является выделение полезной составляющей из наблюдаемых данных.

В общем виде наблюдаемый сигнал можно представить как сумму полезного сигнала и помехи:

$$y(t) = x(t) + \varepsilon(t),$$

где *x(t)* - полезная составляющая, а $\varepsilon(t)$ - шум или помеха.

Для восстановления полезной информации применяются различные математические методы, включая фильтрацию Фурье, вейвлет-анализ и сингулярный спектральный анализ.

Сингулярный спектральный анализ (SSA) - метод исследования временных рядов, основанный на представлении исходной последовательности в виде траекторной матрицы, ее сингулярном разложении и восстановлении отдельных компонентов сигнала.

В презентации данный подход рассматривается также под названием «метод гусеницы».

SSA позволяет выделять тренд, периодические колебания и шумовые составляющие временного ряда.

Применение метода особенно полезно при анализе сложных сигналов, содержащих несколько различных по характеру компонентов.

SSA и вейвлет-анализ являются самостоятельными, но взаимодополняющими подходами к обработке временных рядов.

8. Основные понятия и история развития вейвлет-анализа

Вейвлет-анализ - метод математического исследования сигналов, основанный на их разложении по специальным базисным функциям, локализованным во времени и по частоте.

Термин wavelet происходит от французского слова ondelette и переводится как «маленькая волна» или «всплеск».

Развитие вейвлет-анализа связано с работами Альфреда Хаара, Жана Морле, Алекса Гроссмана, Ингрид Добеши и других исследователей.

В отличие от классического преобразования Фурье, вейвлет-анализ позволяет исследовать изменение частотных характеристик сигнала во времени.

Вейвлет-анализ часто сравнивают с математическим микроскопом, поскольку он позволяет изучать сигнал на различных масштабах, выявляя как общие закономерности, так и локальные особенности.

Это делает метод особенно эффективным при обработке нестационарных сигналов.

9. Вейвлет-функции и их основные свойства

Вейвлет представляет собой функцию, обладающую локализацией и позволяющую анализировать сигнал на различных масштабах.

Важными характеристиками вейвлет-функций являются локализация во времени, частотная локализация и нулевое среднее значение.

Для типичных анализирующих вейвлетов выполняется условие:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi\,(t)\,dt = 0.$$

В презентации рассматриваются различные базисные вейвлет-функции, в том числе вейвлет Хаара, вейвлет Морле, МНАТ-вейвлет и вейвлеты Добеши.

Вейвлет Хаара характеризуется простой ступенчатой формой и используется для базового многомасштабного анализа.

Вейвлет Морле представляет собой локализованное колебание и широко применяется при исследовании временно-частотной структуры сигналов.
MHAT-вейвлет, или «мексиканская шляпа», применяется для выявления локальных особенностей и характерных изменений сигнала.
Вейвлеты Добеши образуют семейство функций, широко используемых при сжатии информации, фильтрации и многомасштабном анализе данных.
Выбор вейвлета определяется особенностями исследуемого сигнала и поставленной задачей.

10. Вейвлет-преобразование и многомасштабный анализ временных рядов

Основная идея вейвлет-преобразования заключается в исследовании сигнала с помощью масштабированных и сдвинутых копий базисной вейвлет-функции.
Непрерывное вейвлет-преобразование может быть записано в виде:

$$W(a,b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{+\infty} f\,(t)\psi^* \left(\frac{t-b}{a}\right) dt,$$

где:

- $f(t)$ - исследуемый сигнал;
- $\psi(t)$ - базисный вейвлет;
- a - масштабный параметр;
- b - параметр сдвига;
- ψ^* - комплексно-сопряженная вейвлет-функция.

Масштабный параметр определяет, какие по длительности особенности сигнала исследуются.
Малые масштабы позволяют анализировать быстрые изменения и высокочастотные компоненты, а большие масштабы - медленные колебания и низкочастотные составляющие.
Параметр сдвига определяет положение анализируемого участка сигнала.
Таким образом, вейвлет-преобразование обеспечивает одновременное исследование временных и частотных характеристик.

11. Локальные и глобальные вейвлет-спектры

Результаты вейвлет-преобразования могут представляться в виде спектров, отражающих распределение энергии сигнала по масштабам и времени.
Локальный вейвлет-спектр, или скалограмма, характеризует изменение интенсивности колебаний в зависимости от времени и масштаба.
В простейшем виде локальная мощность определяется выражением:

$$P(a,b) = |W(a,b)|^{2.}$$

Глобальный вейвлет-спектр характеризует усредненное распределение мощности сигнала по масштабам.
Его можно определить как усреднение локальной мощности по времени:

$$G(a) = \frac{1}{T} \int_0^T |W(a,b)|^2 \; db.$$

Локальный спектр позволяет выявлять временные интервалы, на которых присутствуют определенные колебания.
Глобальный спектр используется для определения преобладающих масштабов колебательного процесса.

Визуализация вейвлет-спектров позволяет анализировать структуру сложных сигналов и выявлять особенности, которые могут быть недостаточно заметны при использовании только классического преобразования Фурье.

12. Применение вейвлет-анализа для исследования нестационарных процессов

Нестационарными называются процессы, статистические или частотные характеристики которых изменяются во времени.

Для анализа таких сигналов вейвлет-преобразование обладает преимуществами благодаря возможности локального исследования колебаний на различных масштабах.

В презентации рассмотрены примеры вейвлет-анализа временных рядов, включая сигналы с переменным периодом, авторегрессионные процессы, белый шум и природные временные ряды.

Также представлены примеры исследования блеска квазара 3C273, чисел Вольфа, характеризующих солнечную активность, и движения полюса Земли.

Вейвлет-анализ позволяет выявлять изменение периодичности, исследовать локальные колебания и определять интервалы времени, на которых отдельные компоненты сигнала становятся более выраженными.

13. Двумерное вейвлет-преобразование и обработка изображений

Изображение может рассматриваться как двумерный сигнал, представленный функцией: $f(x, y)$, где x и y - пространственные координаты.

При обработке изображений необходимо учитывать изменение яркости, цветовых характеристик и структуры объектов в двух пространственных направлениях.

Двумерное вейвлет-преобразование позволяет разложить изображение на компоненты, соответствующие различным масштабам и направлениям изменения яркости.

При одном уровне стандартного двумерного дискретного вейвлет-разложения формируются четыре группы коэффициентов:

Компонент	**Назначение**
LL	Низкочастотное приближение изображения
LH	Детали преимущественно одного пространственного направления
HL	Детали преимущественно другого направления
HH	Диагональные детали

Многократное применение преобразования позволяет построить многоуровневое представление изображения.

Такой подход используется при подавлении шумов, выделении границ, изменении масштаба и сжатии изображений.

14. Пространственная фильтрация и сжатие изображений

Пространственная фильтрация представляет собой обработку изображения непосредственно в области пространственных координат.

В зависимости от используемого алгоритма различают линейную и нелинейную пространственную фильтрацию.

Линейная фильтрация может применяться для сглаживания изображения, подавления шумов и выделения резких изменений яркости.

Нелинейная фильтрация используется для обработки изображений, содержащих сложные помехи и локальные особенности.

Особое значение вейвлет-преобразование имеет при решении задач сжатия информации.

Основной принцип вейвлет-сжатия заключается в представлении изображения в виде коэффициентов различного масштаба и последующем сокращении количества данных, необходимых для хранения или передачи изображения.

При этом наиболее значимые коэффициенты сохраняются, а менее существенные могут быть отброшены или закодированы с меньшей точностью.

В презентации приведены примеры сжатия фотографий, растровых изображений и отпечатков пальцев, а также сравнение изображений до и после обработки.

Практическая эффективность сжатия зависит от типа изображения, используемого вейвлета и допустимой потери качества.

15. Применение вейвлетов для обработки кривых и трехмерных объектов

Вейвлет-анализ может применяться не только для одномерных сигналов и двумерных изображений, но и для исследования геометрических объектов более высокой размерности.

В презентации рассмотрены примеры обработки кривых с использованием сплайновых функций и вейвлетов.

Сплайновые вейвлеты позволяют выполнять сглаживание, изменение формы и локальное редактирование кривых.

Многомасштабное представление обеспечивает возможность изменения геометрических характеристик объекта на различных уровнях детализации.

Для обработки трехмерных объектов используются обобщения вейвлет-преобразований на пространственные данные.

Такой подход позволяет выполнять анализ, сглаживание и компактное представление сложных геометрических структур.

16. Практическое применение вейвлет-анализа в технических, научных и медицинских исследованиях

Вейвлет-анализ широко применяется при исследовании процессов, характеризующихся сложной временно-частотной структурой.

В технических системах он используется для диагностики оборудования, обработки вибрационных сигналов, выявления неисправностей и анализа переходных процессов.

В информационных технологиях вейвлет-преобразование применяется для сжатия данных, обработки изображений и выделения значимых признаков.

В научных исследованиях вейвлет-анализ позволяет исследовать временные ряды природных явлений, астрономических наблюдений и геофизических процессов.

В медицинской диагностике методы вейвлет-анализа применяются для обработки электрокардиографических данных, подавления шумов, устранения дрейфа изолинии и выделения характерных пиков сигнала.

В презентации представлены примеры вейвлет-обработки электрокардиограмм, включающие шумоподавление и определение значимых характеристик сердечных сокращений.

Использование многомасштабного анализа позволяет исследовать изменения сигналов, которые могут быть недостаточно отчетливо выражены при применении традиционных методов обработки данных.

Заключение

Теория оценивания и фильтрации сигналов является важным направлением прикладной математики и информационных технологий, обеспечивающим разработку методов анализа, обработки и восстановления информации, представленной в виде непрерывных и дискретных сигналов.

Основу классического спектрального анализа составляют ряды и преобразования Фурье, позволяющие представлять сложные сигналы в виде совокупности гармонических составляющих и исследовать их частотные характеристики. Однако при анализе нестационарных процессов возникает необходимость учета локальных изменений сигналов во времени.

Одним из эффективных методов решения данной задачи является вейвлет-анализ, основанный на многомасштабном представлении данных. В отличие от классического преобразования Фурье, вейвлет-преобразование позволяет исследовать временную локализацию частотных составляющих, выявлять кратковременные изменения, скачки и другие локальные особенности сигналов.

Использование различных вейвлет-функций, включая вейвлеты Хаара, Морле и Добеши, обеспечивает возможность выбора математического инструмента в соответствии с характером исследуемого сигнала и поставленной задачей.

Особое значение имеет применение вейвлет-анализа при обработке временных рядов, фильтрации шумов, сжатии изображений, исследовании пространственных данных и выделении информативных признаков сложных процессов.

Многомерные вейвлет-преобразования расширяют возможности математической обработки изображений, геометрических объектов и трехмерных структур, обеспечивая эффективное представление данных на различных уровнях детализации.

Таким образом, освоение методов гармонического и вейвлет-анализа формирует теоретическую основу для дальнейшего изучения цифровой обработки сигналов, анализа временных рядов, компьютерного зрения и моделирования сложных динамических систем.

Контрольные вопросы

1. Что понимается под сигналом в теории обработки информации?
2. Чем непрерывный сигнал отличается от дискретного?
3. В чем заключается основная идея гармонического анализа?
4. Какие параметры характеризуют гармоническое колебание?
5. Что представляет собой тригонометрический ряд Фурье?
6. В каких случаях применяется интеграл Фурье?
7. В чем заключается назначение прямого и обратного преобразований Фурье?
8. Какие ограничения имеет классическое преобразование Фурье при анализе нестационарных сигналов?
9. Что понимается под фильтрацией сигналов?
10. Чем низкочастотные фильтры отличаются от высокочастотных?
11. Как связаны фильтрация в частотной области и операция свертки?
12. Что представляет собой дискретное преобразование Фурье?
13. Для чего применяется быстрое преобразование Фурье?
14. Какие методы используются для выделения полезной составляющей сигнала?
15. В чем заключается сущность сингулярного спектрального анализа (SSA)?
16. Что такое вейвлет и каково происхождение данного термина?
17. В чем заключается основное отличие вейвлет-анализа от преобразования Фурье?
18. Какие основные свойства характеризуют вейвлет-функции?
19. Какие разновидности базисных вейвлетов рассматриваются в лекции?
20. Чем отличаются вейвлеты Хаара, Морле и Добеши?
21. В чем заключается принцип непрерывного вейвлет-преобразования?
22. Какую роль играют масштабный параметр и параметр сдвига?
23. Что понимается под многомасштабным анализом сигнала?
24. Что такое локальный вейвлет-спектр?
25. Чем глобальный вейвлет-спектр отличается от локального?

Список литературы

1. Daubechies I. Ten Lectures on Wavelets. - Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 1992. - CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, Vol. 61. - DOI: 10.1137/1.9781611970104.
2. Mallat S. A Wavelet Tour of Signal Processing: The Sparse Way. - 3rd ed. - Academic Press, 2009. - DOI: 10.1016/B978-0-12-374370-1.X0001-8.
3. Percival D. B., Walden A. T. Wavelet Methods for Time Series Analysis. - Cambridge: Cambridge University Press, 2000. - DOI: 10.1017/CBO9780511841040.
4. Torrence C., Compo G. P. A Practical Guide to Wavelet Analysis // Bulletin of the American Meteorological Society. - 1998. - Vol. 79, No. 1. - P. 61–78.
5. Golyandina N., Nekrutkin V., Zhigljavsky A. Analysis of Time Series Structure: SSA and Related Techniques. - Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2001. - 305 p.
6. Gonzalez R. C., Woods R. E. Digital Image Processing. - 4th ed. - Pearson, 2018.