Лекция № 5. Моделирование случайных факторов

Цель лекции

Сформировать у обучающихся теоретические знания о принципах и методах моделирования случайных факторов в сложных системах, изучить способы генерации и проверки качества случайных чисел, методы моделирования случайных событий, дискретных и непрерывных случайных величин. Ознакомить с основными подходами к математическому моделированию, классификацией математических моделей и принципами построения моделей сложных технологических процессов.

План лекции

1. Понятие случайных факторов и их роль в имитационном моделировании.
2. Генерация случайных и псевдослучайных чисел.
3. Методы проверки качества генераторов случайных чисел.
4. Моделирование случайных событий.
5. Моделирование дискретных случайных величин.
6. Методы моделирования непрерывных случайных величин.
7. Организация моделирования нескольких случайных факторов.
8. Математическое обеспечение имитационных систем.
9. Аналитическое, численное и качественное исследование математических моделей.
10. Классификация математических моделей: статические и динамические, с сосредоточенными и распределенными параметрами.
11. Основные аспекты математической модели и блочный принцип ее построения.

Ожидаемые результаты обучения

После изучения лекции обучающиеся должны:

- знать основные виды случайных факторов и способы их представления в имитационных моделях;
- понимать принципы формирования случайных и псевдослучайных последовательностей;
- объяснять методы проверки равномерности, случайности и независимости случайных чисел;
- уметь моделировать случайные события с заданными вероятностями;
- различать методы моделирования дискретных и непрерывных случайных величин;
- понимать особенности использования показательного, нормального и биномиального распределений;
- знать основные подходы к математическому моделированию сложных систем;
- различать статические и динамические модели, модели с сосредоточенными и распределенными параметрами;
- объяснять смысловой, аналитический и вычислительный аспекты математической модели;
- понимать назначение блочного принципа построения математических моделей.

1. Понятие случайных факторов и их роль в имитационном моделировании

При исследовании сложных технических, производственных и информационных систем необходимо учитывать влияние факторов, поведение которых невозможно заранее определить с полной точностью.

К таким факторам относятся случайные отказы оборудования, изменение продолжительности обслуживания, нерегулярное поступление заявок, колебания параметров технологических процессов и другие неопределенные воздействия.

Случайные факторы – это факторы, значения или моменты возникновения которых не могут быть однозначно предсказаны и характеризуются вероятностными закономерностями.

В имитационных моделях случайные факторы могут представляться в трех основных формах.

Случайные события – события, которые при определенных условиях могут произойти или не произойти. Например, возникновение отказа вычислительной системы.
Случайные величины – величины, принимающие различные значения с определенными вероятностями. Например, время между поступлениями клиентов в систему обслуживания.
Случайные функции (процессы) – функции времени или других аргументов, значения которых изменяются случайным образом. Например, изменение нагрузки на вычислительную систему.
Использование случайных факторов позволяет учитывать неопределенность функционирования реальных объектов и более подробно исследовать поведение сложных систем.
В основе большинства методов имитации случайных факторов лежит использование последовательностей случайных чисел, равномерно распределенных на интервале от 0 до 1.

2. Генерация случайных и псевдослучайных чисел

Генерация случайных чисел является важнейшим элементом имитационного моделирования, поскольку именно на ее основе осуществляется воспроизведение случайных событий и величин.
Случайные числа – числовые значения, полученные в результате случайного процесса и характеризующиеся определенным распределением вероятностей.
Для моделирования могут использоваться случайные числа, получаемые из физических источников случайности, например шумов электронных устройств.
В компьютерных системах широко применяются программные генераторы псевдослучайных чисел.
Псевдослучайные числа – числа, формируемые с помощью детерминированных алгоритмов, последовательности которых при правильном выборе генератора обладают необходимыми статистическими свойствами.
В исходном материале рассматривается рекуррентный метод генерации случайных чисел.
Одним из простых алгоритмов является линейный конгруэнтный генератор:

$$X_{n+1} = (aX_n + c) \mod m ,$$

где:

- X_n – предыдущее значение последовательности;
- X_{n+1} – следующее значение;
- a – множитель;
- c – аддитивная константа;
- m – модуль.

Для получения числа, принадлежащего интервалу [0,1), используется нормировка:

$$U_n = \frac{X_n}{m}.$$

При c=0 генератор относится к мультипликативным конгруэнтным генераторам, а при $c \neq 0$ – к смешанным линейным конгруэнтным генераторам.
Важное достоинство программной генерации заключается в воспроизводимости результатов. При одинаковых начальных условиях и параметрах генератора можно получить одну и ту же последовательность чисел и повторить модельный эксперимент.
Однако качество генерируемых последовательностей существенно влияет на достоверность результатов моделирования. Поэтому используемые генераторы должны проверяться на соответствие установленным статистическим требованиям.

3. Методы проверки качества генераторов случайных чисел

Качество последовательностей псевдослучайных чисел оценивается с помощью специальных статистических методов.
В лекционном материале рассматриваются три основные характеристики: равномерность, стохастичность и независимость.

Проверка равномерности

Равномерность характеризует соответствие распределения полученных чисел равномерному закону на интервале [0,1].
Для проверки равномерности строится гистограмма относительных частот.
Исследуемый интервал разделяется на m равных частей, после чего определяется количество чисел, попавших в каждый интервал.
При равномерном распределении теоретическая вероятность попадания числа в любой из интервалов составляет:

$$P_i = \frac{1}{m}.$$

Чем ближе наблюдаемые относительные частоты к теоретическим значениям, тем лучше последовательность соответствует требованию равномерности.

Проверка стохастичности

Стохастичность характеризует случайный характер последовательности чисел.
Одним из методов проверки является метод комбинаций.
В данном методе анализируется количество единиц в выбранных разрядах двоичного представления чисел.
При независимости разрядов и одинаковой вероятности появления нуля и единицы количество единиц подчиняется биномиальному распределению.
Ожидаемое количество чисел, содержащих j единиц в l разрядах, определяется выражением:

$$E_j = N \binom{l}{j} \left(\frac{12}{\backslash right}\right)^l,$$

где N – объем исследуемой последовательности, а $\binom{l}{j}$ – число сочетаний из l по j.
Полученные экспериментальные частоты сравниваются с теоретическими с помощью статистических критериев согласия.

Проверка независимости

Независимость означает отсутствие вероятностной зависимости между отдельными значениями последовательности.
Для проверки независимости могут использоваться методы корреляционного анализа.
Исследуемая последовательность сравнивается с той же последовательностью, сдвинутой на определенное количество элементов.
Оценивается коэффициент корреляции:

$$r(\tau) = \mathrm{corr}(U_i, U_{i+\tau}),$$

где τ – величина сдвига.
Для независимых случайных величин коэффициент корреляции равен нулю. Однако близкий к нулю коэффициент сам по себе не доказывает полной независимости.
Еще одной характеристикой генератора является длина периода последовательности – количество генерируемых значений до начала повторения.
При разработке имитационной модели необходимо использовать генераторы с достаточно большим периодом и удовлетворительными статистическими характеристиками.

4. Моделирование случайных событий

Моделирование случайных событий основано на использовании случайных чисел с равномерным распределением.
Пусть событие *A* может произойти с вероятностью \(P(A)=p\).
Для определения наступления события формируется случайное число:

$$U \sim U(0,1).$$

Если выполняется условие:

$$U < p,$$

событие считается наступившим. В противном случае событие не происходит.
Например, пусть вероятность отказа вычислительной системы составляет 0,3.
Если сгенерированное число равно 0,18, считается, что отказ произошел.
Если получено число 0,75, отказ не происходит.
Для моделирования нескольких несовместных событий используется разбиение интервала [0,1) на участки, соответствующие вероятностям этих событий.
Пусть имеются три события A_1, A_2, A_3, вероятности которых равны соответственно 0,3; 0,5 и 0,2.

Интервал случайного числа	**Наступившее событие**
$0 \le U < 0{,}3$	A_1
$0{,}3 \le U < 0{,}8$	A_2
$0{,}8 \le U < 1$	A_3

Если группа событий является неполной, добавляется дополнительное событие, соответствующее ситуации, когда ни одно из рассматриваемых событий не наступило.
Для моделирования зависимых событий используются условные вероятности.
Например, если наступление события *B* зависит от события *A*, необходимо знать *P*(*A*), $P(B \mid A)$ и $P\left(B \mid \overline{A}\right)$.
Сначала моделируется событие *A*, затем в зависимости от результата выбирается соответствующая условная вероятность и определяется наступление события *B*.

5. Моделирование дискретных случайных величин

Дискретная случайная величина – случайная величина, которая принимает отдельные значения из конечного или счетного множества с определенными вероятностями.
В имитационном моделировании дискретные случайные величины используются при исследовании количества отказов, поступающих заявок, обслуживаемых клиентов и других процессов.
В исходном материале рассматриваются два основных метода моделирования дискретных случайных величин: метод последовательных сравнений и метод интерпретации.

Метод последовательных сравнений

Метод основан на последовательном сравнении равномерно распределенного случайного числа с накопленными вероятностями значений дискретной случайной величины.
Пусть случайная величина *Y* принимает значения $y_1, y_2, \dots, y_n$с вероятностями $p_1, p_2, \dots, p_n$
Сумма вероятностей должна удовлетворять условию:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Формируется случайное число *U*, равномерно распределенное на интервале [0,1).
Далее определяется первое значение *j*, для которого выполняется условие:

$$U < \sum_{i=1}^{j} p_i.$$

После выполнения данного условия случайная величина считается принявшей значение $Y = y_j$

Для повышения эффективности поиска могут использоваться специальные методы, например бинарный поиск по накопленным вероятностям.

Метод интерпретации

Метод интерпретации основан на физическом или вероятностном смысле моделируемого закона распределения.

Например, биномиальное распределение описывает количество успешных исходов в серии независимых испытаний.

Если вероятность успеха в каждом испытании равна p, то вероятность получения ровно k успехов в n испытаниях определяется формулой:

$$P(Y = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Для моделирования биномиальной случайной величины генерируются n независимых случайных чисел.

Каждое число сравнивается с вероятностью p. Количество чисел, удовлетворяющих условию $U_i < p$, принимается в качестве значения моделируемой величины.

Такой подход позволяет воспроизводить случайные процессы, в которых результат определяется количеством наступивших событий.

6. Методы моделирования непрерывных случайных величин

Непрерывная случайная величина – случайная величина, которая может принимать значения из некоторого непрерывного диапазона.

Непрерывные случайные величины широко применяются при моделировании продолжительности обслуживания, времени между отказами оборудования, изменения физических параметров и других процессов.

В исходном материале выделяются три метода моделирования непрерывных случайных величин:

1. Метод нелинейных преобразований.
2. Метод композиций.
3. Табличный метод.

Метод нелинейных преобразований основан на преобразовании равномерно распределенных случайных чисел в величины с требуемым распределением.

Метод композиций предполагает получение случайной величины с использованием комбинации нескольких распределений или случайных компонентов.

Табличный метод использует заранее полученные расчетные соотношения, позволяющие определять случайные величины по равномерно распределенным случайным числам.

В качестве примеров рассмотрим моделирование показательного и нормального распределений.

Моделирование показательного распределения

Показательное распределение используется при моделировании интервалов между событиями, возникающими с постоянной интенсивностью, например между отказами оборудования в простейшей модели надежности.

Функция распределения имеет вид:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \qquad t \geq 0,$$

где $\lambda > 0$ – параметр интенсивности.
Для получения случайной величины используется преобразование:

$$T = -\frac{\ln U}{\lambda},$$

где U – случайное число, равномерно распределенное на интервале (0,1).
Полученное значение T может интерпретироваться как случайный интервал времени между двумя последовательными событиями.

Моделирование нормального распределения

Нормальное распределение широко применяется при исследовании величин, формирующихся под воздействием большого количества случайных факторов.
Плотность нормального распределения определяется выражением:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right),$$

где:

- μ – математическое ожидание;
- σ – среднеквадратическое отклонение.

В исходном материале рассматривается приближенный метод генерации нормальной случайной величины на основе суммы 12 равномерно распределенных случайных чисел:

$$X \approx \mu + \sigma\left(\sum_{i=1}^{12} U_i - 6\right).$$

В качестве примера приведено моделирование попадания дротика в мишень.
Координаты точки попадания рассматриваются как случайные величины, распределенные по нормальному закону.
Для каждой координаты формируется независимая последовательность случайных чисел. Полученные значения используются для определения случайного положения точки попадания относительно центра мишени.

7. Организация моделирования нескольких случайных факторов

В сложных имитационных моделях одновременно могут присутствовать различные виды случайных факторов.
Например, при исследовании производственной системы необходимо учитывать вероятность отказа оборудования, продолжительность ремонта, интервалы поступления материалов и случайные изменения производительности.
Каждый из этих факторов может характеризоваться собственным законом распределения.
Для обеспечения корректности результатов моделирования важно правильно организовать формирование последовательностей случайных чисел.
В исходном материале рекомендуется использовать отдельные генераторы или отдельные последовательности случайных чисел для моделирования различных случайных факторов.
При этом необходимо обеспечивать соответствие статистических характеристик последовательностей требованиям конкретной задачи.
Использование качественных генераторов случайных чисел позволяет повысить достоверность результатов и обеспечить воспроизводимость модельных экспериментов.

8. Математическое обеспечение имитационных систем

Математическое обеспечение имитационной системы представляет собой совокупность математических зависимостей и алгоритмов, необходимых для построения и исследования модели.

Оно включает математические соотношения, описывающие поведение реального объекта, а также алгоритмы подготовки исходных данных, проведения имитации, обработки и вывода результатов.
Математическое моделирование – процесс построения математической модели реального объекта и ее исследования с целью получения характеристик рассматриваемой системы.
Вид математической модели определяется природой исследуемого объекта, поставленными задачами и требованиями к точности результатов.
Математическая модель всегда является приближенным представлением оригинала и отражает только необходимые характеристики исследуемой системы.
В зависимости от способа исследования математические модели могут использоваться в аналитическом, имитационном и комбинированном моделировании.
Аналитическое моделирование предполагает описание функционирования системы с помощью математических уравнений и зависимостей.
Имитационное моделирование основывается на воспроизведении поведения системы с помощью моделирующих алгоритмов, учитывающих последовательность событий, взаимодействие элементов и случайные воздействия.
Комбинированное моделирование предполагает совместное использование аналитических и имитационных методов исследования.

9. Аналитическое, численное и качественное исследование математических моделей

В лекционном материале выделяются три основных способа исследования аналитических моделей.
Аналитический метод предполагает получение решения математической модели в виде явных зависимостей между исследуемыми величинами.
Такой подход позволяет установить общие закономерности поведения системы и определить влияние ее параметров на результаты исследования.
Однако аналитические решения часто удается получить только для относительно простых моделей.
Численный метод применяется в случаях, когда аналитическое решение отсутствует или его получение связано со значительными трудностями.
При численном исследовании используются вычислительные алгоритмы, позволяющие получить приближенные значения искомых характеристик.
Численные методы особенно эффективны при использовании компьютерной техники и позволяют исследовать более широкий класс сложных систем.
Качественный метод применяется для определения общих свойств решений математической модели без необходимости их явного вычисления.
Например, качественный анализ может использоваться для исследования устойчивости системы, определения возможных режимов функционирования и выявления закономерностей изменения ее состояния.
Выбор способа исследования определяется сложностью математической модели, доступностью исходных данных и поставленной научной задачей.

10. Классификация математических моделей

Математические модели классифицируются в зависимости от временных и пространственных характеристик исследуемого процесса.
В исходном материале выделены четыре основных класса: статические, динамические, с сосредоточенными и распределенными параметрами.

Статические модели

Статическая модель – математическая модель, описывающая состояние системы при отсутствии изменения исследуемых параметров во времени.
Такие модели применяются при исследовании стационарных режимов функционирования технических и технологических систем.

Математическое описание статической модели может включать алгебраические уравнения, а для пространственно распределенных систем – дифференциальные уравнения по пространственным переменным.

Динамические модели

Динамическая модель – математическая модель, описывающая изменение состояния объекта во времени.

В отличие от статических моделей, динамические учитывают временные зависимости исследуемых характеристик.

Математическое описание динамической системы обычно включает производные по времени.

Примером является уравнение:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t),$$

где $x(t)$– переменная состояния, $u(t)$– входное воздействие, а f – функция, определяющая изменение состояния системы.

Динамические модели применяются для исследования переходных процессов, управления техническими объектами и прогнозирования поведения систем.

Модели с сосредоточенными параметрами

Модель с сосредоточенными параметрами – модель, в которой исследуемые переменные считаются одинаковыми во всех точках рассматриваемого объекта.

Такие модели обычно описываются алгебраическими или обыкновенными дифференциальными уравнениями.

В исходном материале в качестве примера приводится аппарат идеального перемешивания. Предполагается, что интенсивность перемешивания обеспечивает одинаковую концентрацию вещества во всех точках аппарата.

Модели с распределенными параметрами

Модель с распределенными параметрами – математическая модель, в которой исследуемые величины изменяются в пространстве и, возможно, во времени.

Такие модели обычно описываются дифференциальными уравнениями в частных производных.

Примером может служить модель распределения температуры или концентрации вещества внутри технологического аппарата.

Использование моделей с распределенными параметрами позволяет исследовать пространственную неоднородность процессов и получать более подробную информацию о поведении системы.

11. Основные аспекты математической модели и блочный принцип ее построения

В исходном материале математическая модель рассматривается как совокупность трех взаимосвязанных аспектов: смыслового, аналитического и вычислительного.

Смысловой аспект представляет собой физическое описание исследуемого объекта и закономерностей протекающих в нем процессов.

Аналитический аспект включает математическое описание объекта в виде системы уравнений, отражающих функциональные зависимости между его переменными.

Вычислительный аспект содержит методы и алгоритмы решения системы уравнений, реализованные в форме компьютерной программы.

Совместное рассмотрение этих аспектов позволяет обеспечить последовательный переход от физического описания объекта к математической модели и ее программной реализации.

Важным принципом построения сложных математических моделей является блочный принцип.

Он предполагает представление исследуемого объекта в виде совокупности отдельных взаимосвязанных подсистем.

Каждый блок описывает определенную часть исследуемого процесса и характеризуется собственными входными и выходными переменными.
Блочный подход позволяет упростить математическое описание сложных систем, повысить удобство разработки и обеспечить возможность последующего изменения отдельных компонентов модели.
Особое значение данный принцип имеет при моделировании химико-технологических процессов.
Например, при исследовании технологического аппарата могут выделяться блоки, описывающие гидродинамику, теплообмен, массообмен и другие физико-химические процессы.
При изменении геометрических размеров оборудования соответствующие изменения могут затрагивать прежде всего гидродинамические характеристики аппарата.
При этом необходимо обеспечивать согласованность входных и выходных переменных всех блоков для получения замкнутой математической модели процесса.
Использование блочного принципа создает условия для исследования сложных технологических систем с различной степенью детализации математического описания.

Заключение

Моделирование случайных факторов является важной составляющей имитационного моделирования, позволяющей учитывать неопределенность и вероятностный характер функционирования реальных систем.
Основу моделирования случайных событий и величин составляет использование последовательностей равномерно распределенных случайных чисел.
Для обеспечения достоверности результатов необходимо контролировать статистические характеристики генераторов случайных чисел, включая равномерность, стохастичность и независимость последовательностей.
Моделирование дискретных и непрерывных случайных величин позволяет воспроизводить разнообразные вероятностные процессы, возникающие в технических, производственных и информационных системах.
Математическое моделирование обеспечивает формальное описание исследуемых процессов с помощью уравнений и алгоритмов, а выбор конкретного класса модели определяется особенностями объекта и целями исследования.
Важную роль играет классификация математических моделей на статические и динамические, а также модели с сосредоточенными и распределенными параметрами.
Применение смыслового, аналитического и вычислительного аспектов математического моделирования в сочетании с блочным принципом построения моделей позволяет систематизировать исследование сложных объектов и создавать эффективные средства компьютерного моделирования.
Таким образом, освоение методов моделирования случайных факторов формирует основу для дальнейшего изучения имитационных систем, статистического анализа результатов вычислительных экспериментов и математического моделирования сложных технологических процессов.

Контрольные вопросы

1. Что понимается под случайными факторами в имитационном моделировании?
2. В каких формах случайные факторы могут представляться в имитационных моделях?
3. Чем случайное событие отличается от случайной величины?
4. Что такое псевдослучайные числа?
5. Какие методы используются для генерации псевдослучайных чисел?
6. В чем заключается принцип работы линейного конгруэнтного генератора?
7. Какие основные характеристики определяют качество генератора случайных чисел?
8. Как осуществляется проверка равномерности распределения случайных чисел?
9. В чем заключается проверка стохастичности случайной последовательности?

10. Как оценивается независимость элементов последовательности случайных чисел?
11. Что понимается под периодом генератора псевдослучайных чисел?
12. Как моделируется случайное событие с заданной вероятностью?
13. Каким образом моделируется полная группа несовместных событий?
14. Как организуется моделирование зависимых случайных событий?
15. Какие основные методы используются для моделирования дискретных случайных величин?
16. В чем заключается метод последовательных сравнений?
17. Как применяется метод интерпретации для моделирования биномиального распределения?
18. Какие методы используются для моделирования непрерывных случайных величин?
19. Для каких задач применяется показательное распределение?
20. Как осуществляется моделирование случайной величины с нормальным распределением?

Список литературы

1. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. – 2-е изд., испр. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 320 с.
2. Law A. M. Simulation Modeling and Analysis. – 5th ed. – McGraw-Hill Education, 2015.
3. Banks J., Carson J. S., Nelson B. L., Nicol D. M. Discrete-Event System Simulation. – 5th ed. – Pearson, 2010.
4. Knuth D. E. The Art of Computer Programming. Volume 2: Seminumerical Algorithms. – 3rd ed. – Addison-Wesley, 1997. – 762 p.
5. Devroye L. Non-Uniform Random Variate Generation. – Springer-Verlag, 1986. – DOI: 10.1007/978-1-4613-8643-8.