Лекция 10

Теория оценивания и фильтрации

Автор Джомартова Ш.А.

Сигналы

- *Сигнал* — некоторая функция $f(x)$. Обычно x – время или пространственная координата.
- *Непрерывный сигнал* — $f(x)$ имеет непрерывную область определения. Не путать с определением *непрерывной функции*!
- *Дискретный сигнал* — $f(x)$ определена на дискретном наборе точек.

Гармонический анализ

Идея: представить сигнал
в виде суперпозиции (суммы)
гармонических колебаний,
т.е. функций вида:

$$A\sin(\omega x+\alpha)$$

A — амплитуда, ω — частота, α — фазовый угол.
Период колебаний $T = 2\pi/\omega$.

Тригонометрический ряд Фурье

для одномерных непрерывных сигналов, определенных на конечном отрезке [– /, /]:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right)$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} \, dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} \, dx$$

$(n = 0, 1, 2, \ldots)$ $(n = 1, 2, \ldots)$

Интеграл Фурье

предельный случай ряда Фурье для одномерных сигналов, определенных на $(-\infty, +\infty)$:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \exp(iz(u-x)) du\, dz$$

Преобразование Фурье

- Преобразование Фурье:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-i\omega x)\, dx$$

$$A(\omega) = \left|F(\omega)\right|, \quad \operatorname{tg}\alpha(\omega) = \arg F(\omega)$$

- Обратное преобразование Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \exp(i\omega x)\, d\omega$$

Фильтрация

- *Фильтрация* — выделение (или подавление) частотных составляющих сигнала.
- *Фильтр* — функция, осуществляющая фильтрацию.
- *Высоко-* и *низкочастотные* фильтры. (High-pass and low-pass filters)
- *Идеальный фильтр* (perfect filter) — box-функция в частотной области, sinc-функция в пространственной.
- Фильтрация: умножение на фильтр в частотной области или свертка в пространственной.

Дискретный случай

- Рассматривается случай *конечных* дискретных сигналов:

$$f = \left\{ f_k \right\}_{k=i_0}^{i_1}$$

- Длина сигнала — количество элементов:

$$N = i_1 - i_0 + 1$$

Дискретное преобразование Фурье

- Дискретное преобразование Фурье (сигналу длины *N* ставится в соответствие сигнал длины *N*):

$$F_l = \sum_{k=i_0}^{i_1} f_k \exp\left(\frac{-2\pi i k l}{N}\right), \quad l = \overline{i_0, i_1}, \quad N = i_1 - i_0 + 1.$$

- **Обратное дискретное преобразование Фурье:**

$$f_k = \frac{1}{N} \sum_{l=i_0}^{i_1} F_l \exp\left(\frac{2\pi i k l}{N}\right), \quad l = \overline{i_0, i_1}, \quad N = i_1 - i_0 + 1.$$

Фильтрация – выделение нужного

Пусть *y* - некоторый объект, в составе которого имеется полезная составляющая x. Фильтром будем считать оператор Ф , выделяющий полезную составляющую



Пусть *y* - некоторый объект, в составе которого имеется полезная составляющая x. Фильтром будем считать оператор Ф , выделяющий полезную составляющую

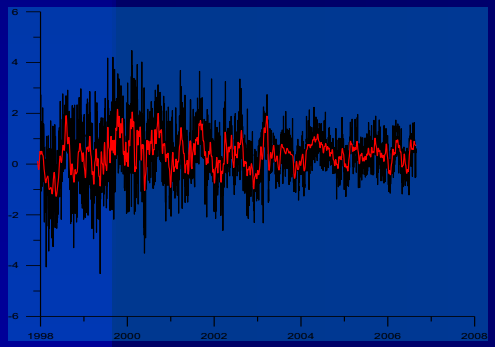
Большей частью мы будем иметь дело с линейной фильтрацией, хорошо разработанной в силу известного свойства

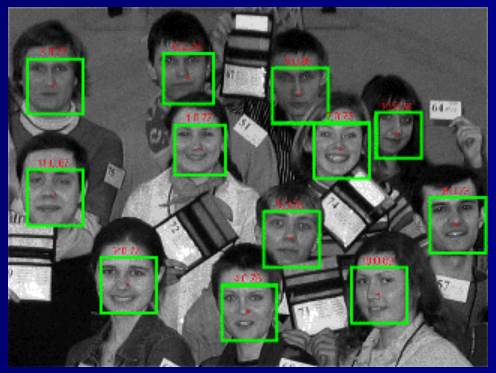


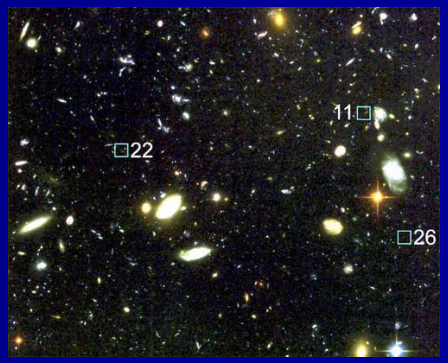
$$x_i = -\sum_{k=1}^{p} \alpha_k x_{i-k} + \sum_{k=0}^{q} \beta_k n_{i-k},$$

$$\Phi f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) f(t-\tau) d\tau = h * f,$$

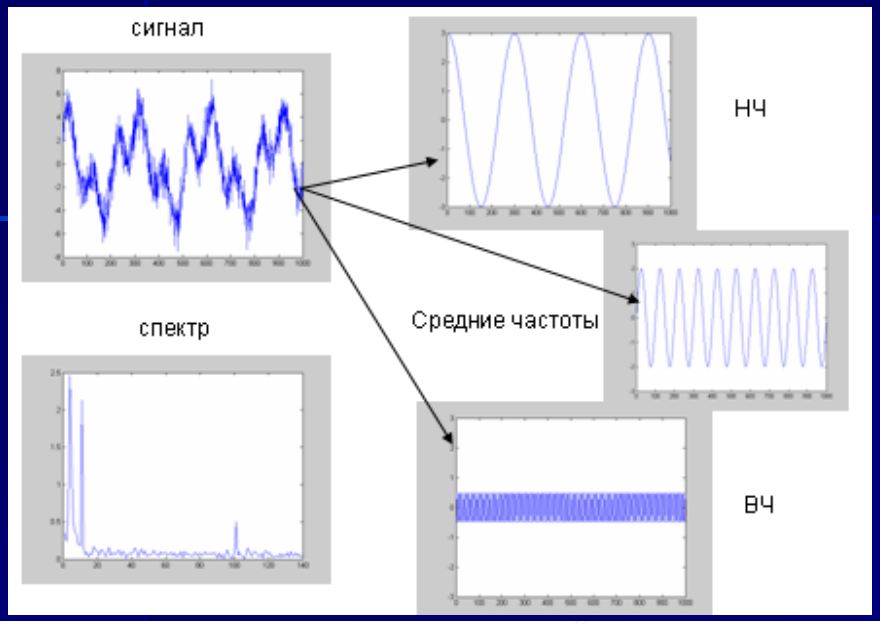
Чтобы выделить – нужно разделить на составляющие

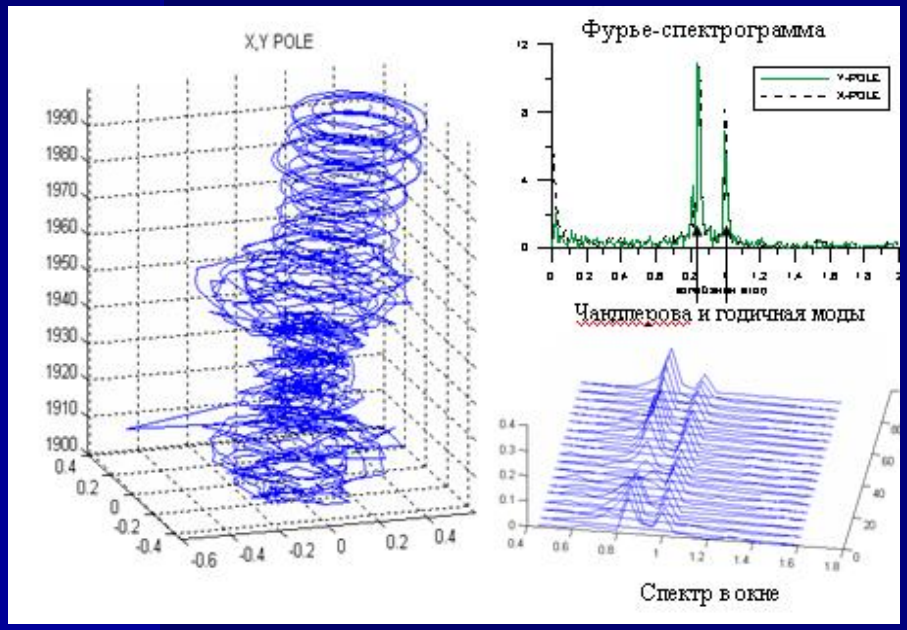




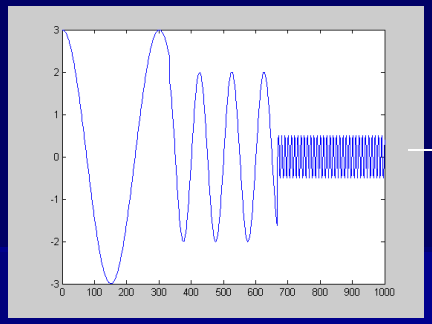


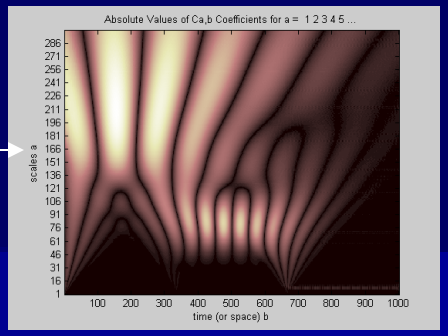
Фурье – базис тригонометрический

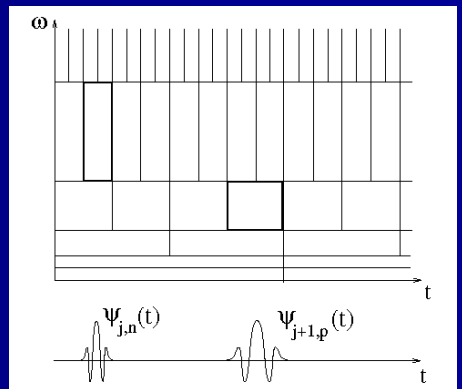


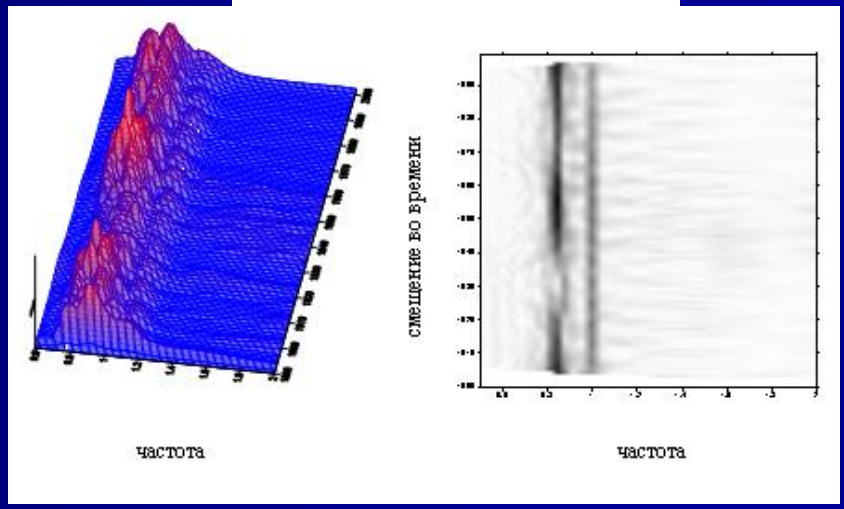


Вейвлет – базис

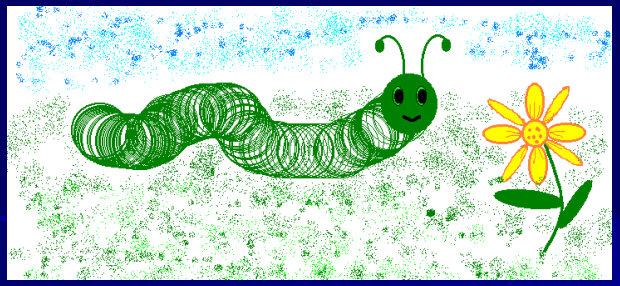




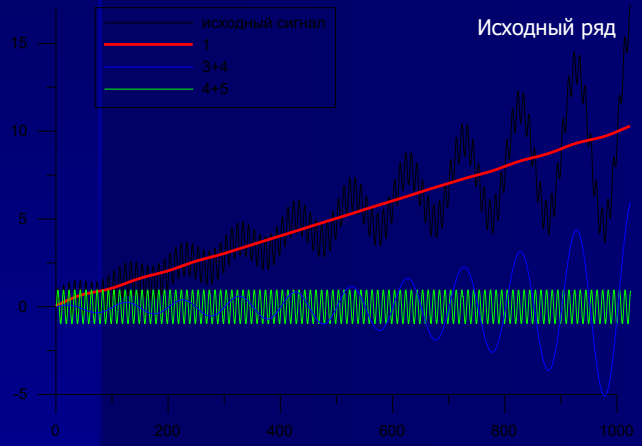




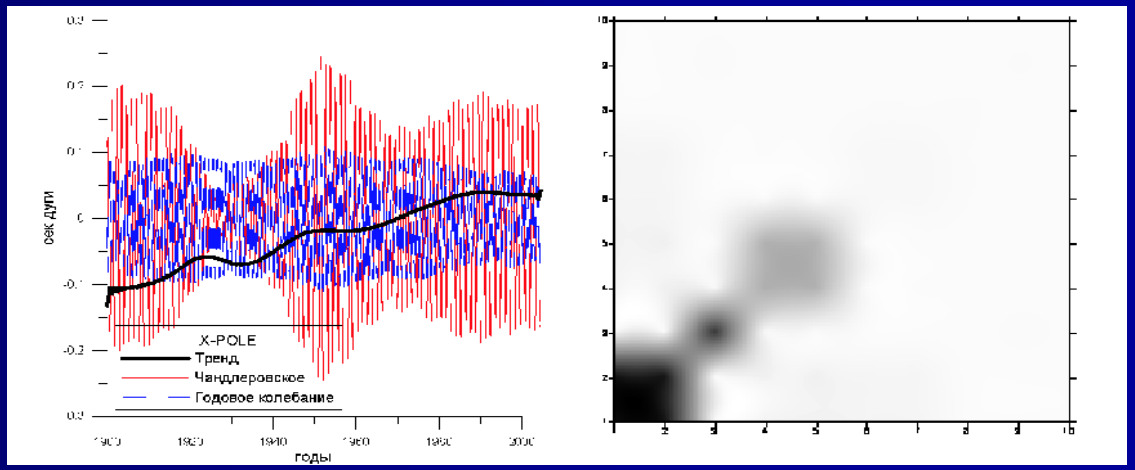
Метод гусеницы – SSA

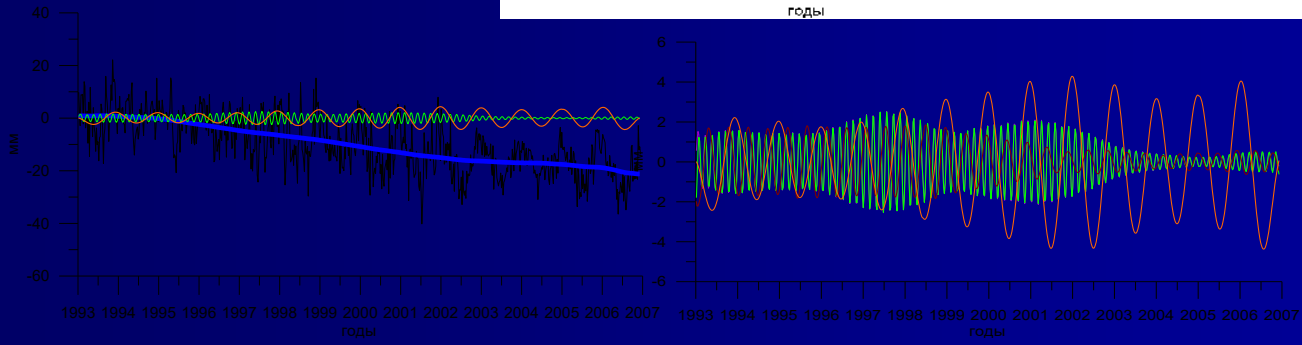


Результат выделения главных компонент в простом примере



Сингулярный спектральный анализ X-координаты полюса





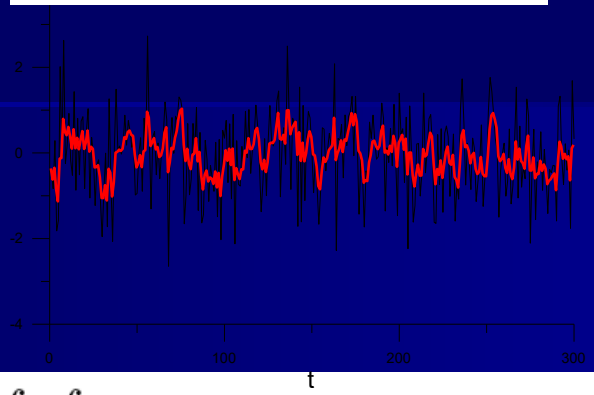
ССА X-координаты геоцентра

Приборы как фильтры

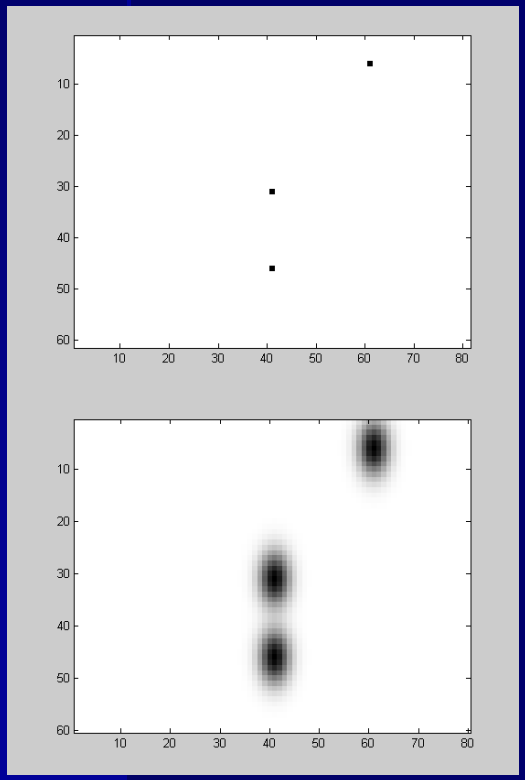
$$h(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}$$

$$H(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$$

$$T\dot{x}(t) + x(t) = u(t)$$

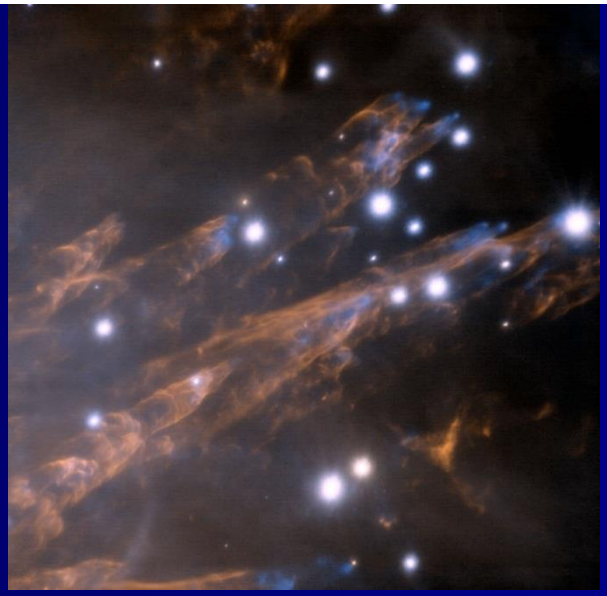


$$W(i\omega) = \frac{1}{1 + Ti\omega}$$



$$\int \int g(\xi,\zeta) f(\xi - x, \zeta - y) d\xi d\zeta$$

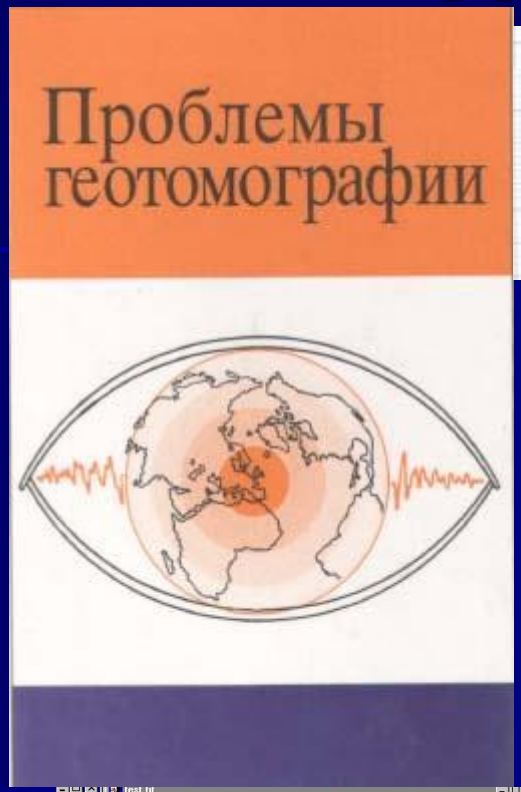
$$g(x,y) = ke^{-\left(\frac{x}{\sigma_x}\right)^2} e^{-\left(\frac{y}{\sigma_y}\right)^2}$$





Обратные задачи

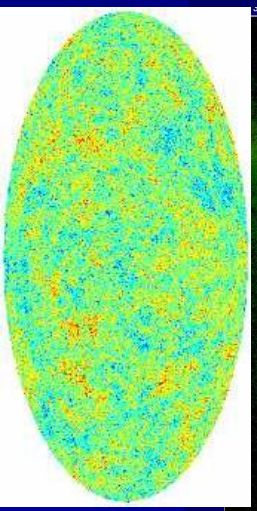


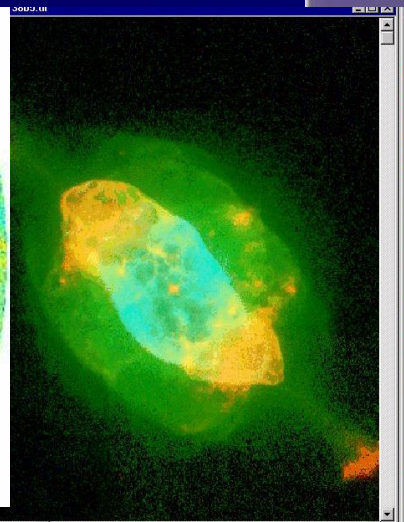


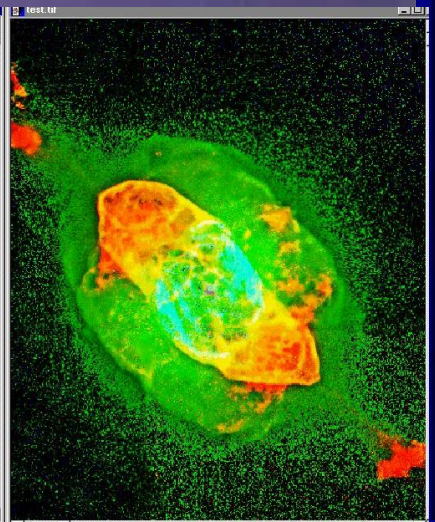










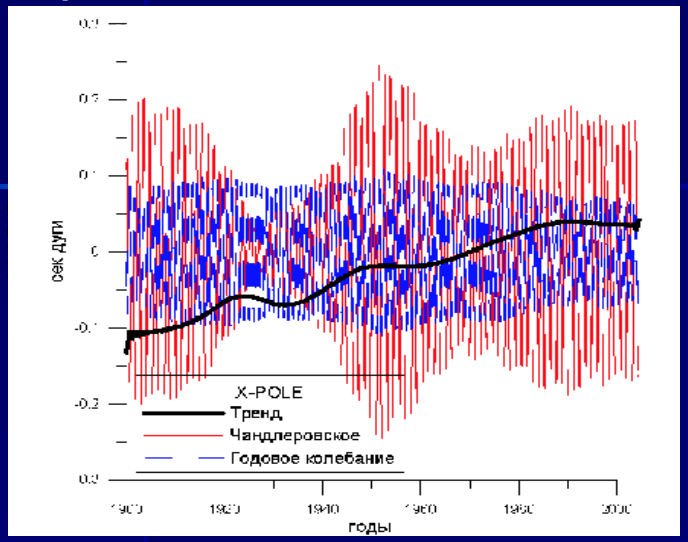






ОБРАТНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

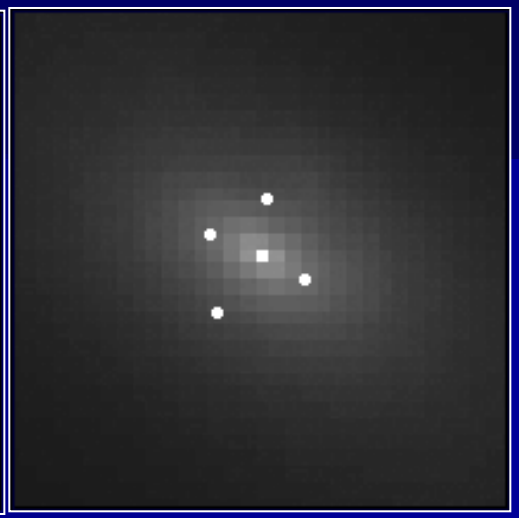
разделённый CCA



наблюдения

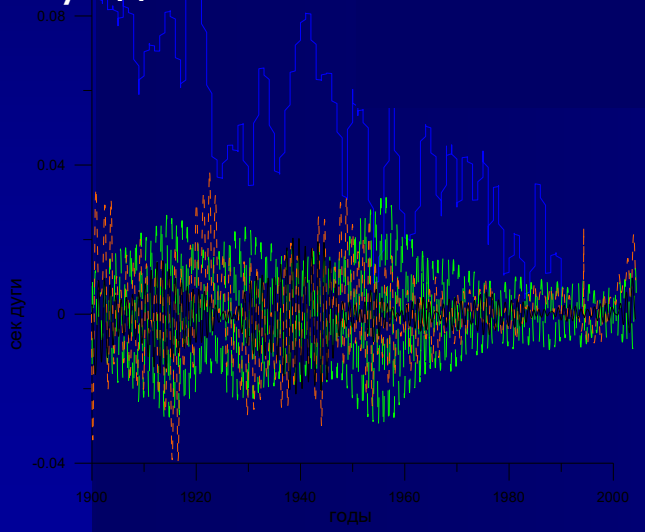


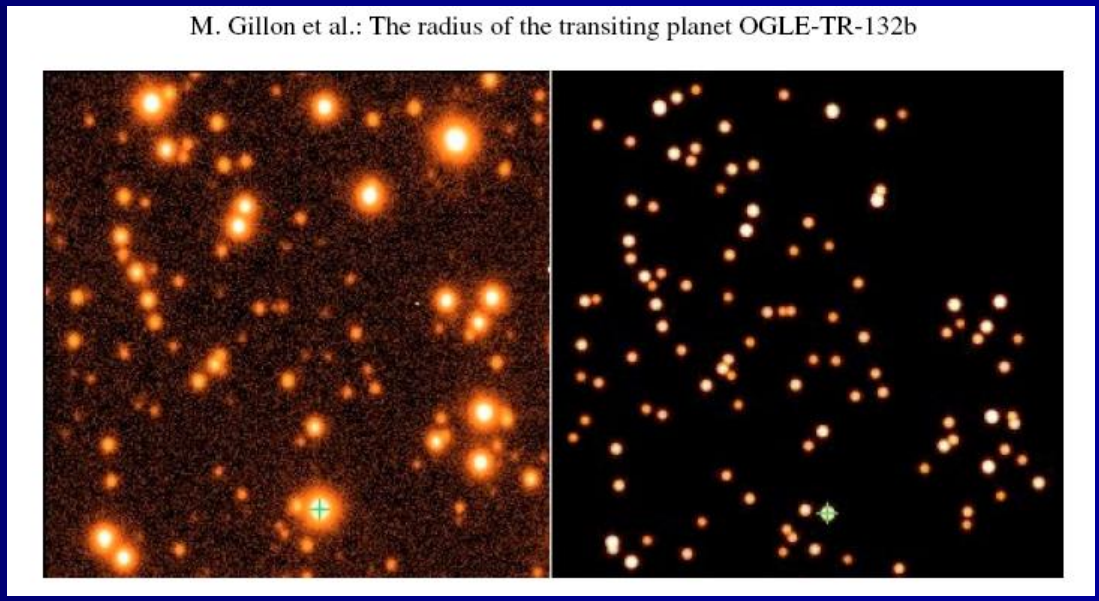
восстановление



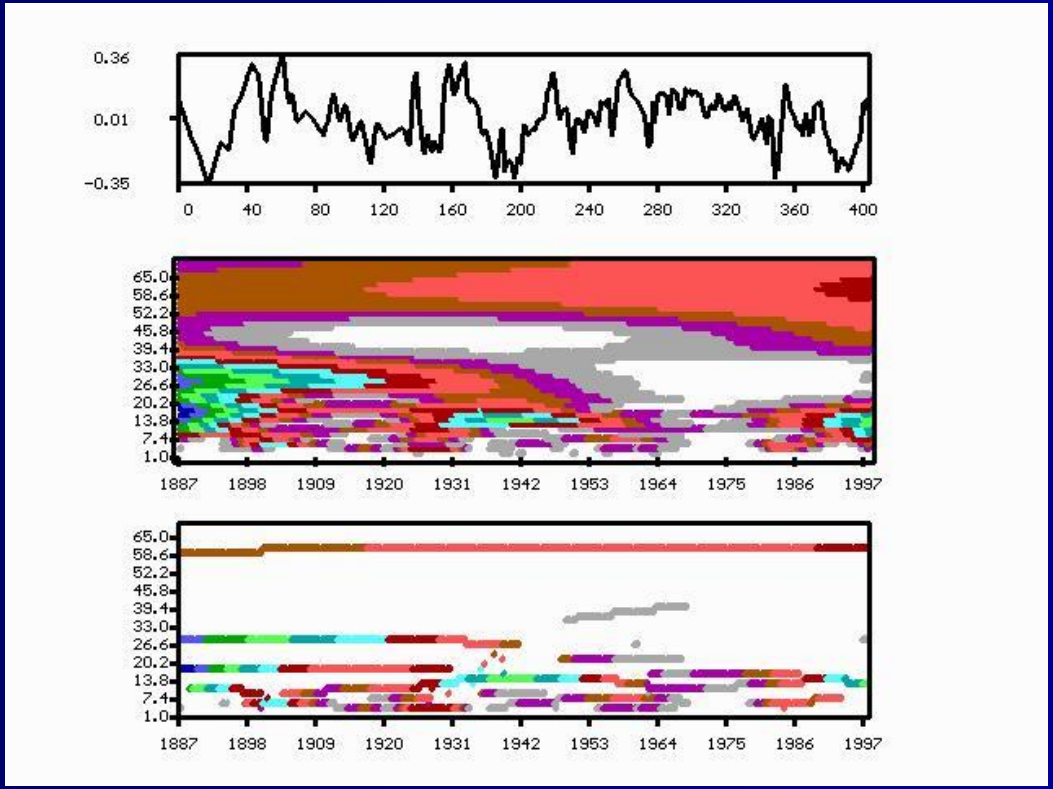
Со Коптелова, Шимановская

Восстановленное входное возбуждение





ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ



История вейвлетов

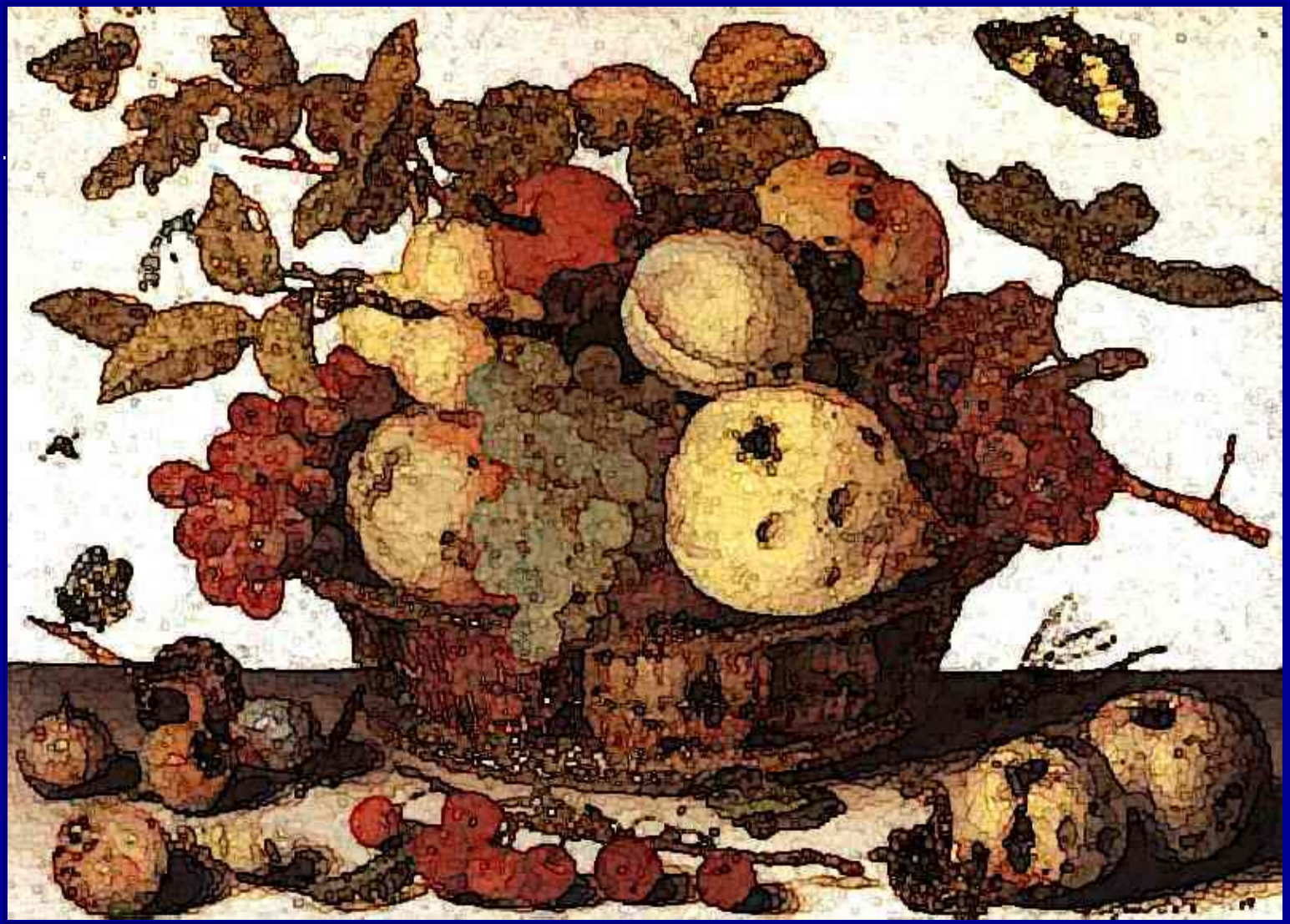
- Фурье, 1807
- Хаар, 1909
- Jean Morlet, Alex Grossmann, 1984
- Ingrid Daubechies,1992
- …

Применение вейвлетов

- Анализ временных рядов
- Анализ изображений
- Сжатие больших массивов информации
- (алгоритмах по идентификации отпечатков пальцев, используемых ФБР, преобразования *.bmp и *.tiff файлов в *.jpg файлы)
- Задачи фильтрации и чистки многомерных сигналов
- Задачи численного анализа

- Вейвлет - анализ называют микроскопом, поскольку он позволяет исследовать каждый масштаб с необходимой и достаточной для него разрешающей способностью. Как образно сказано, можно увидеть и лес, и деревья.

Бальтазар ван дер Аст (1593-1657)





Анри Матисс (1869-1954)





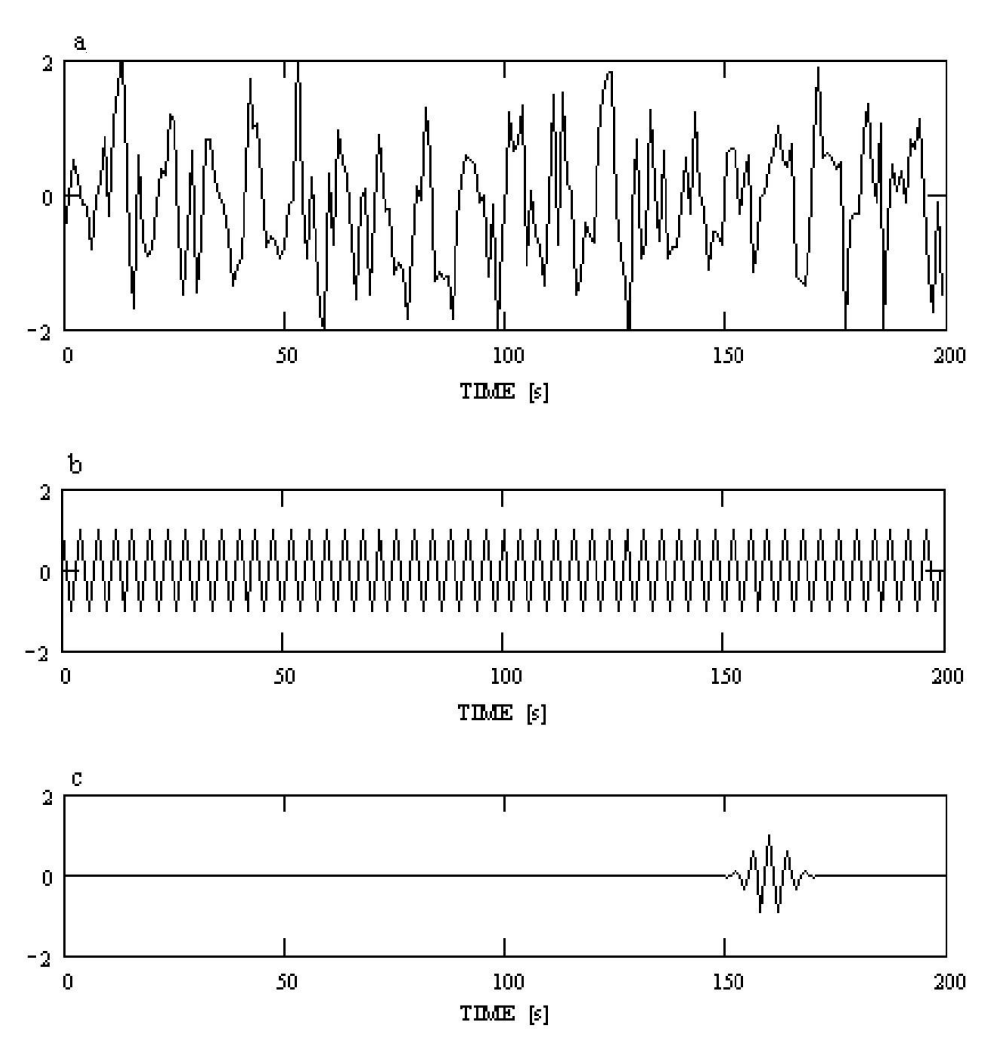




Происхождение слова wavelet

- Morlet,Grossmann: *ondelette (фр.)*
- Английский вариант*: wavelet*
- Русский вариант: *всплеск*

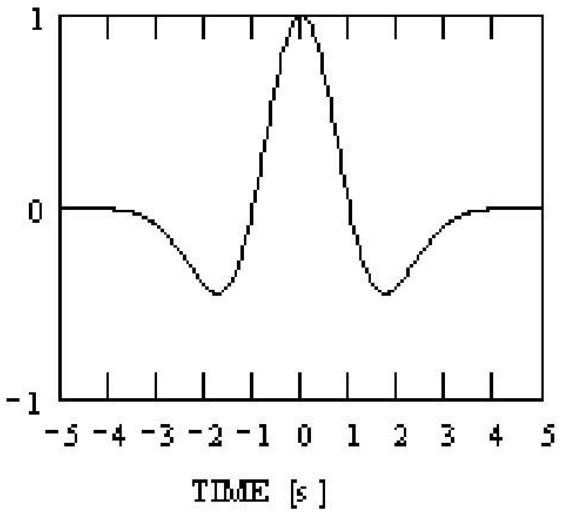
ВОЛНЫ и ВСПЛЕСКИ

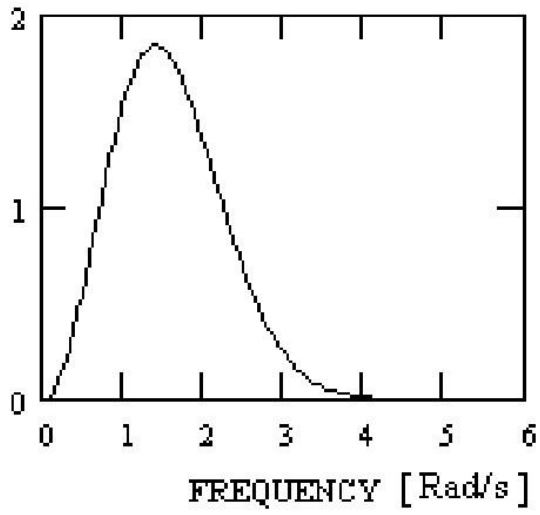


МНАТ-вейвлет

$$\psi(t) = \frac{d^2}{dt^2} e^{-\frac{t^2}{2}} = (1 - t^2) e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$\psi(\omega) = \sqrt{2\pi}\,\omega^2 e^{-\frac{\omega^2}{2}}$$

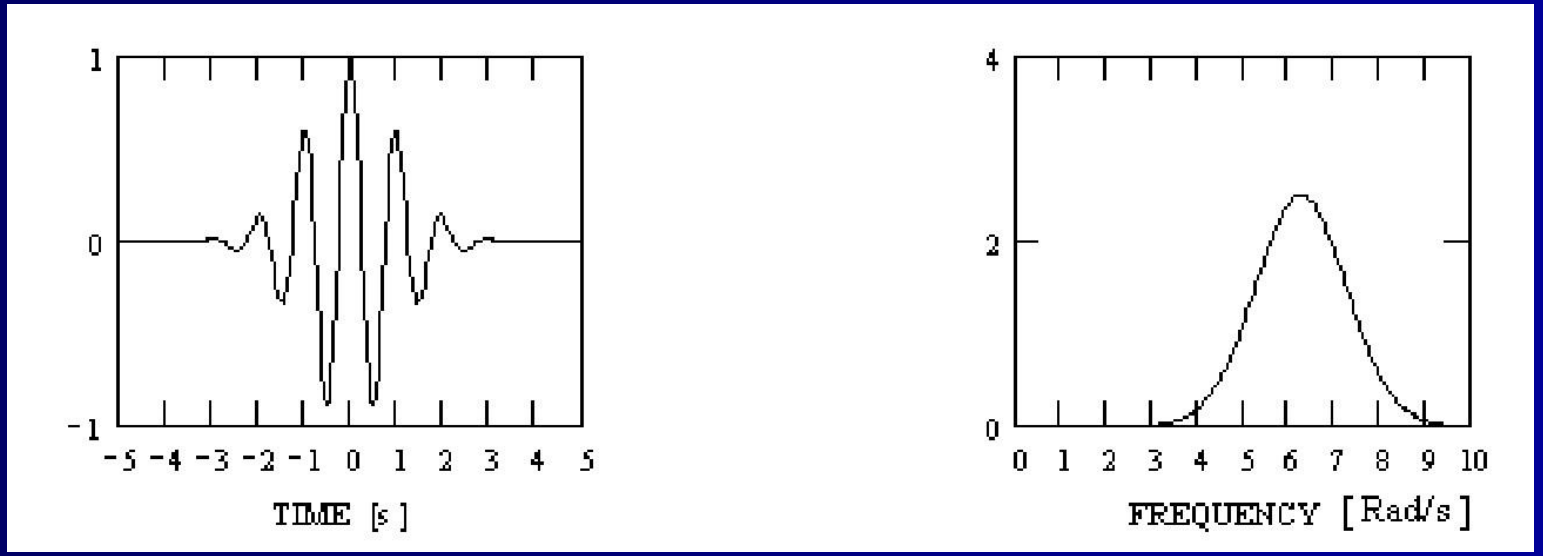




Вейвлет Морле

$$\psi(t) = e^{-\frac{t^2}{\alpha^2}} e^{i2\pi t}$$

$$\psi(\omega) = \alpha\sqrt{\pi}\, e^{-\frac{\alpha^2(2\pi-\omega)^2}{4}}$$



Вейвлет-спектры

Аналог равенства Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt = C_\psi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |W(a,b)|^2 \frac{da \, db}{a^2}$$

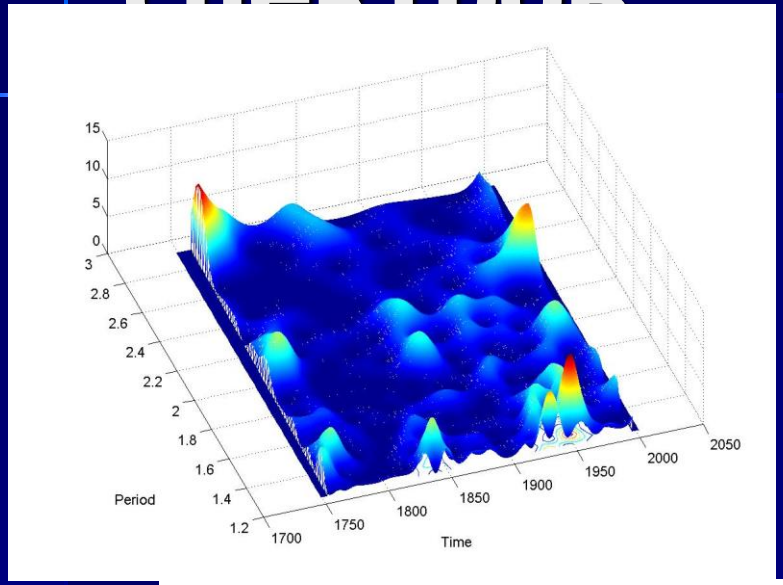
Локальный спектр (скалограмма)

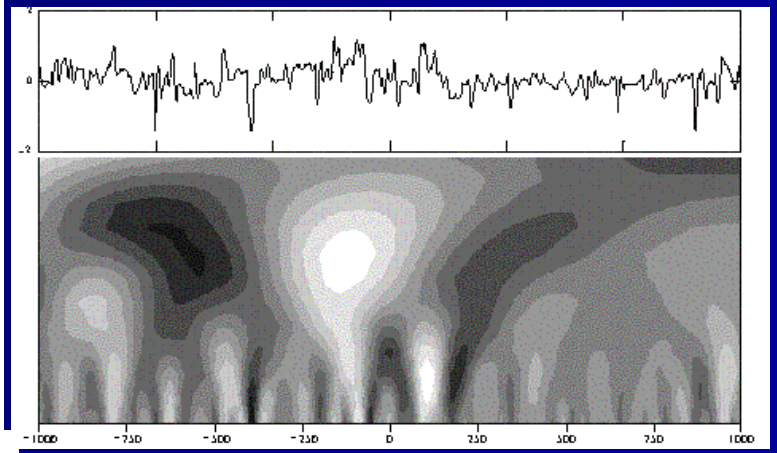
$$E(a,b) = |W(a,b)|^2$$

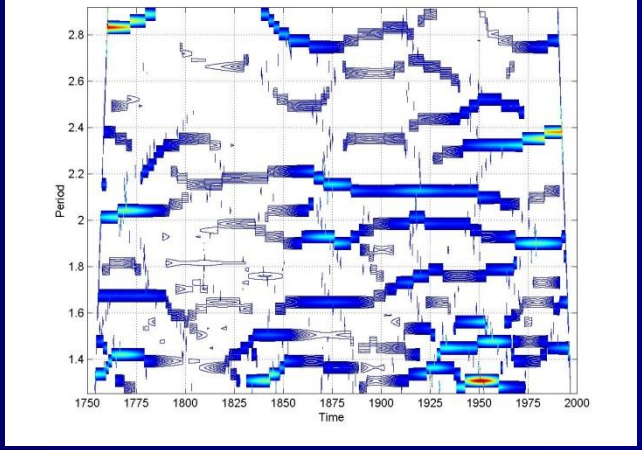
Глобальный спектр (скейлограмма)

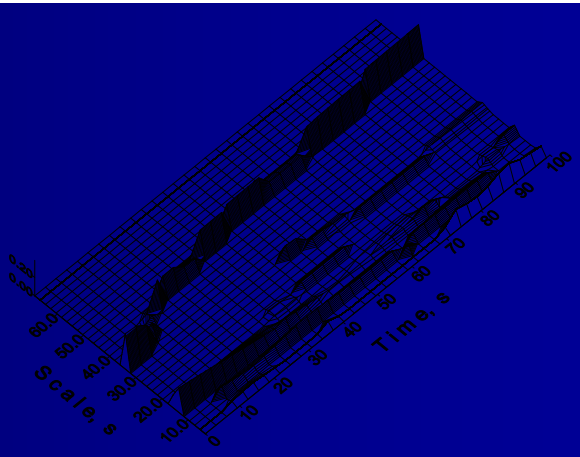
$$E_w(a) = \int_{-\infty}^{\infty} |W(a,b)|^2 db$$

Визуализация вейвлет-спектров



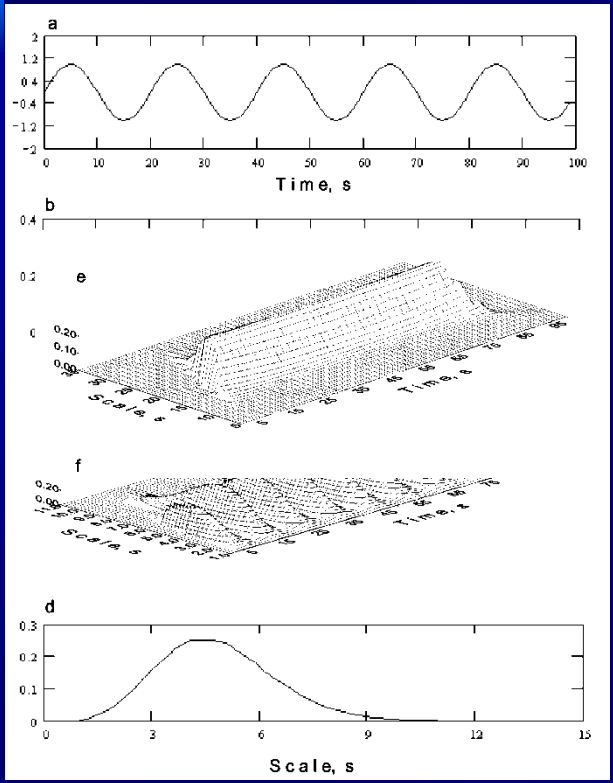




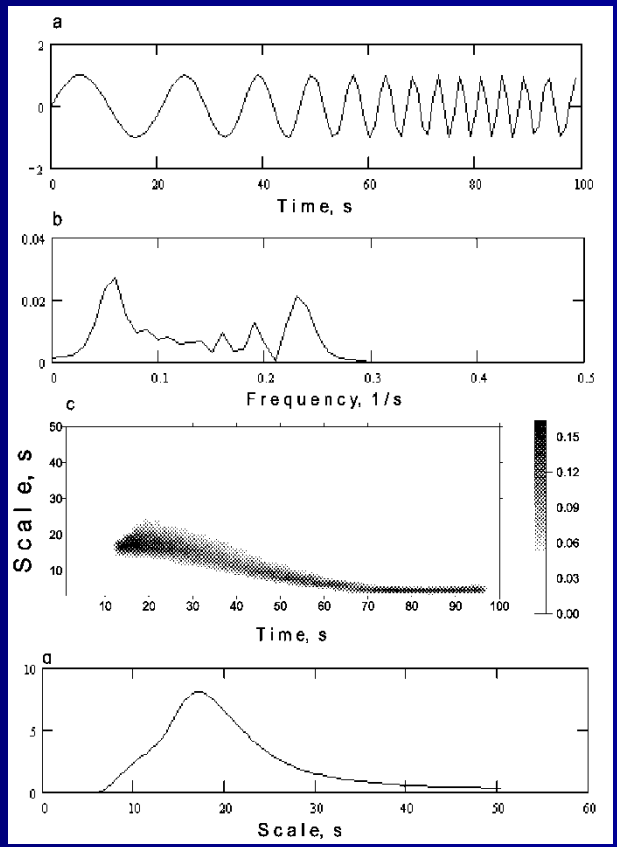


ВЕЙВЛЕТ-ПОРТРЕТЫ

Синусоида

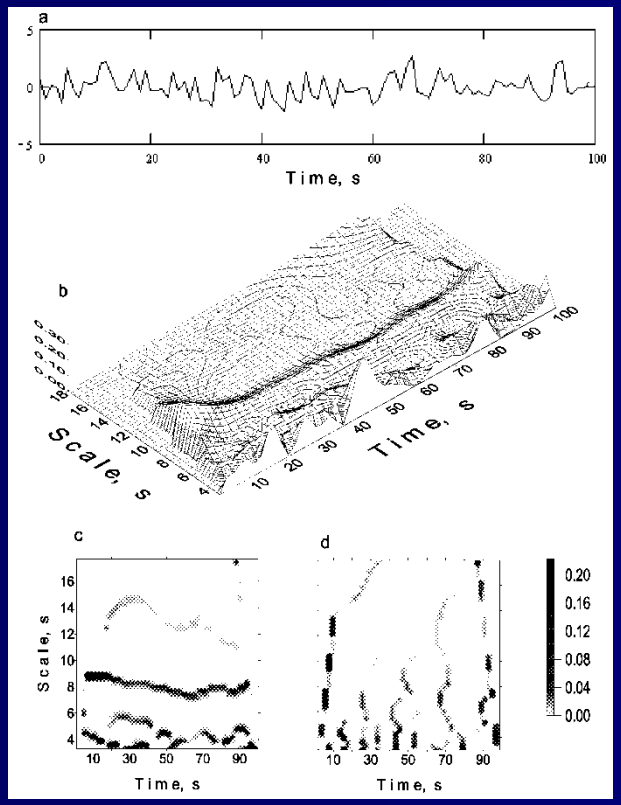


СИНУСОИДА с ПЕРЕМЕННЫМ ПЕРИОДОМ

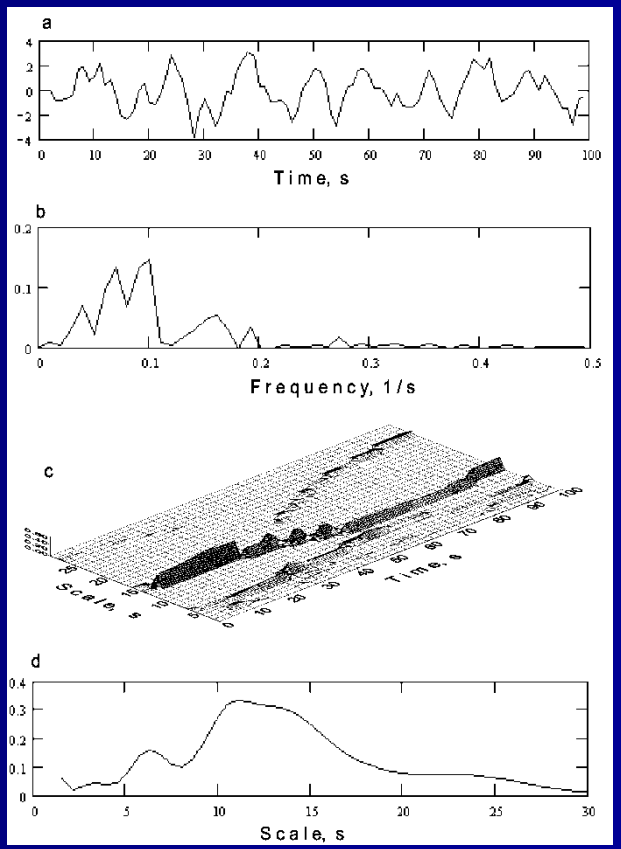


ВЕЙВЛЕТ-ПОРТРЕТЫ

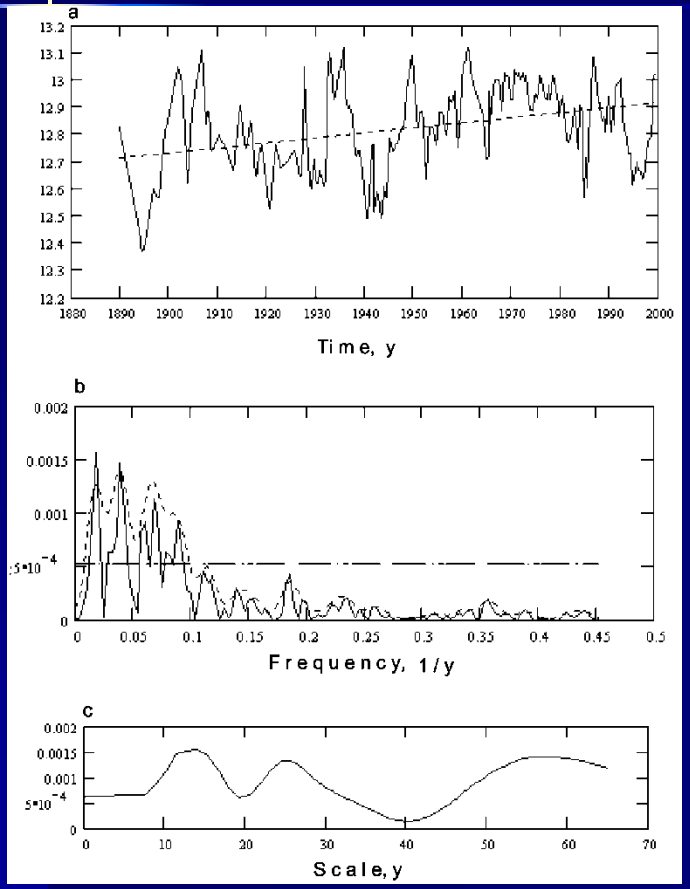
Дискретный белый шум

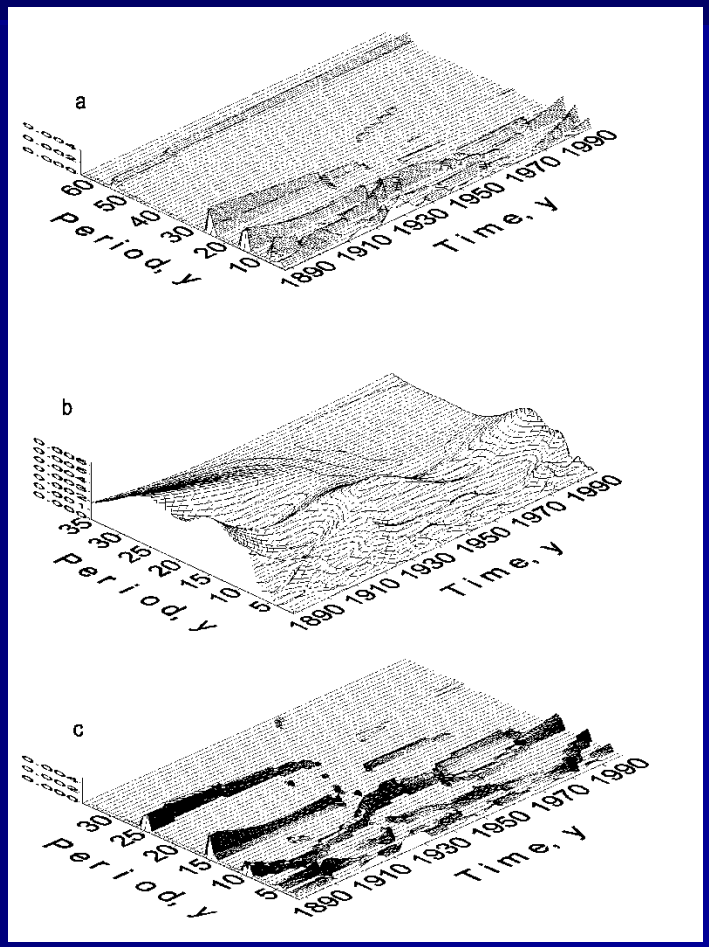


АВТОРЕГРЕССИОННАЯ МОДЕЛЬ

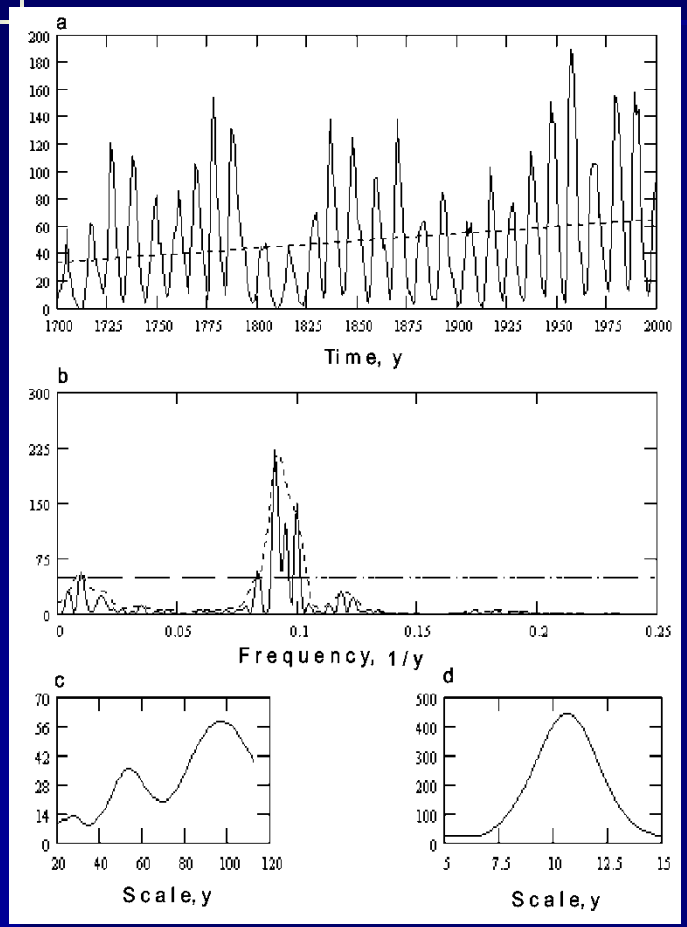


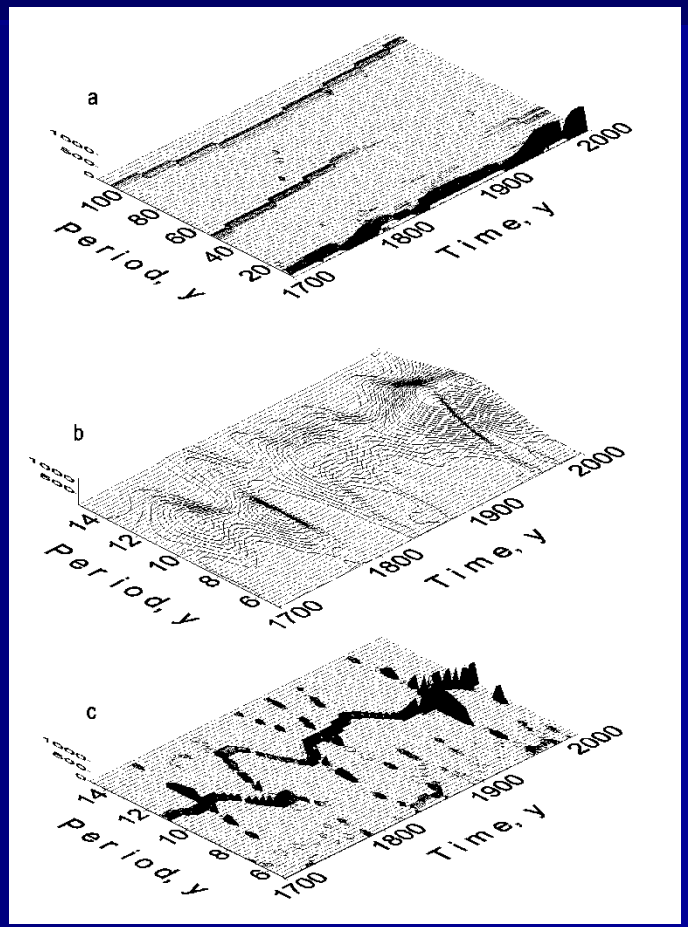
ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗ БЛЕСКА КВАЗАРА 3С273



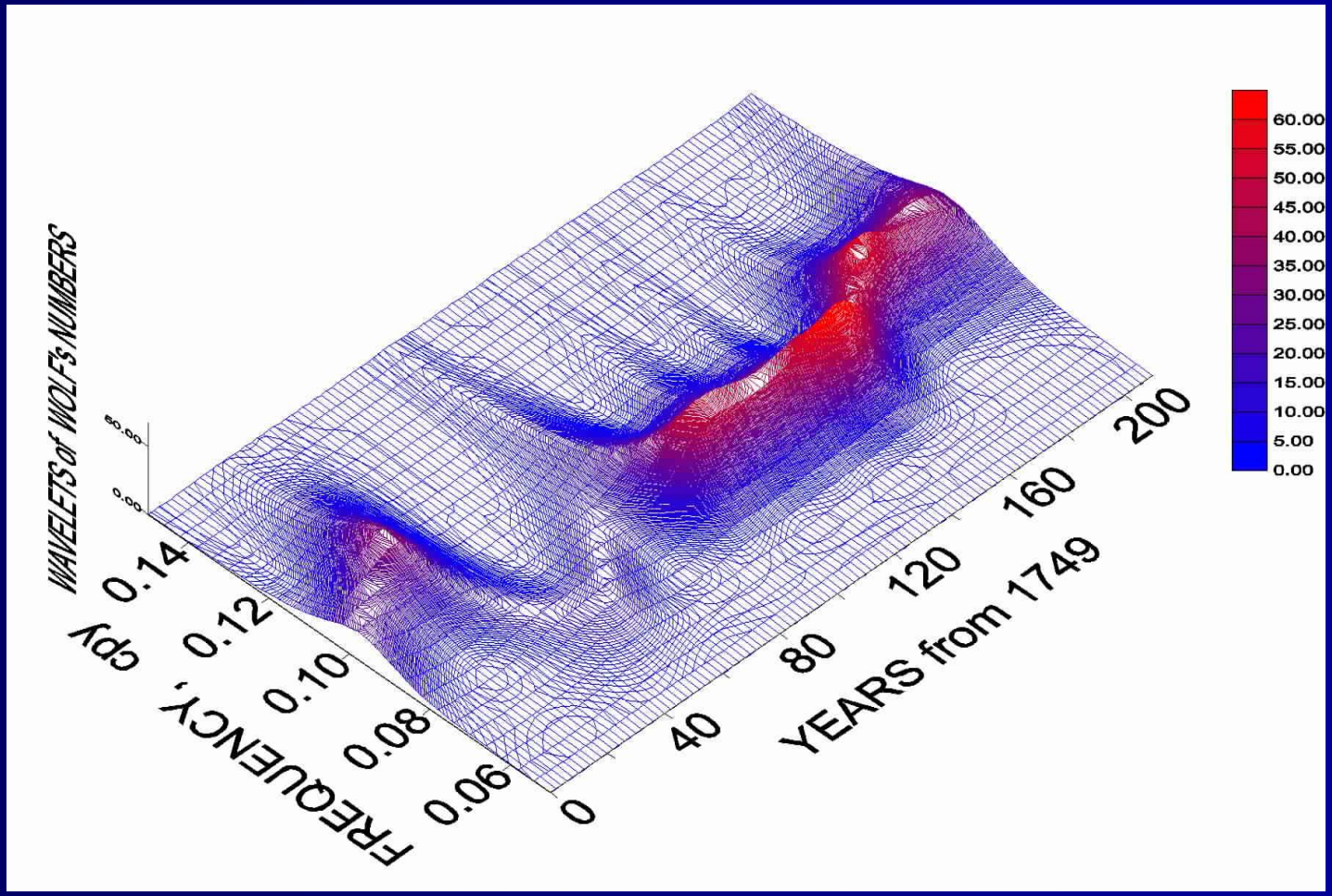


ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗ ЧИСЕЛ ВОЛЬФА

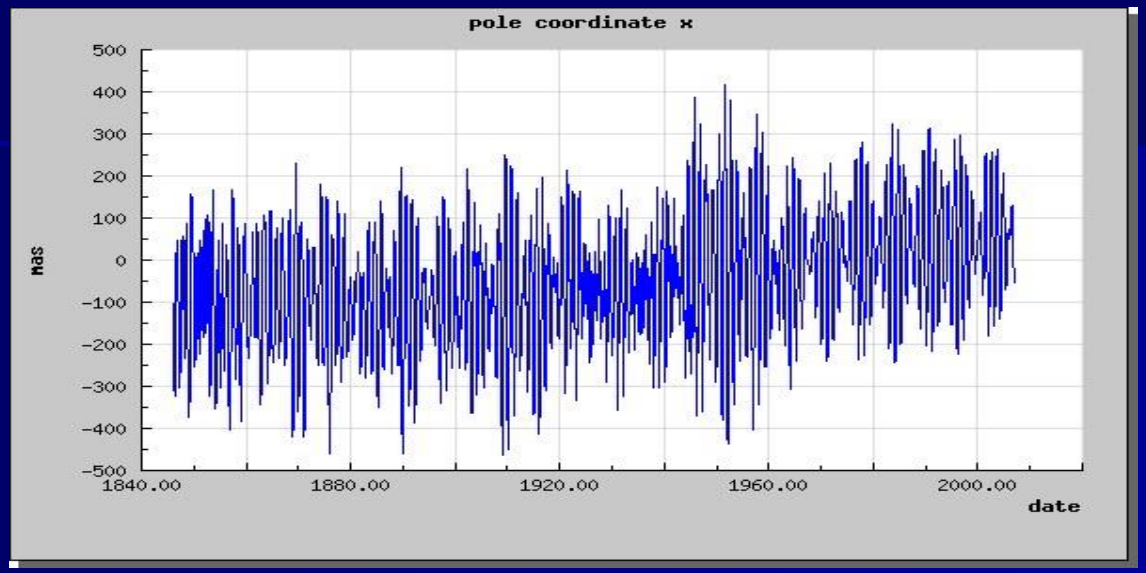


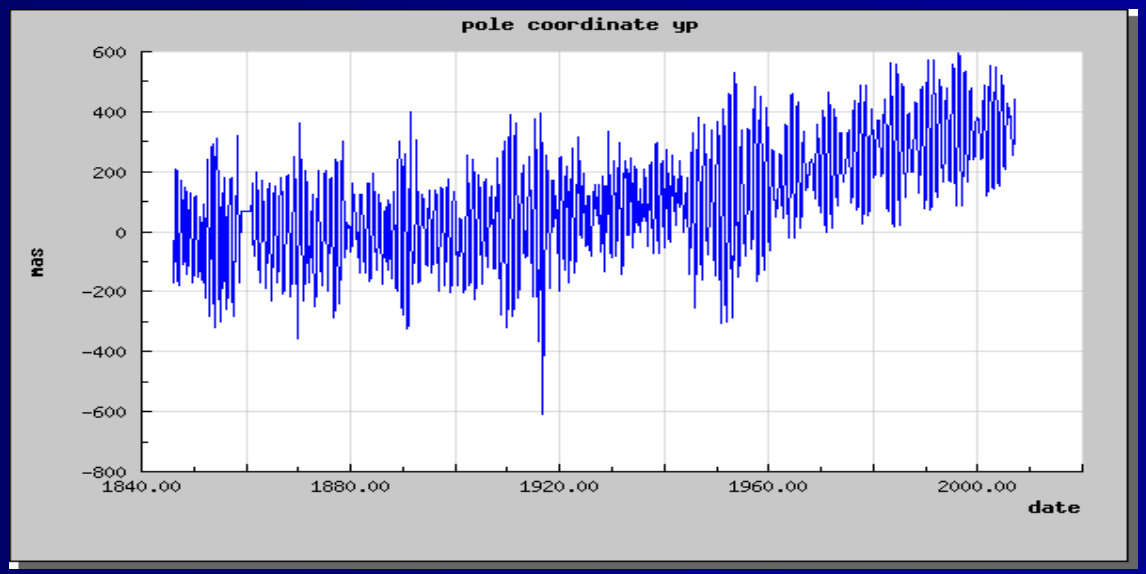


Скалограмма чисел Вольфа

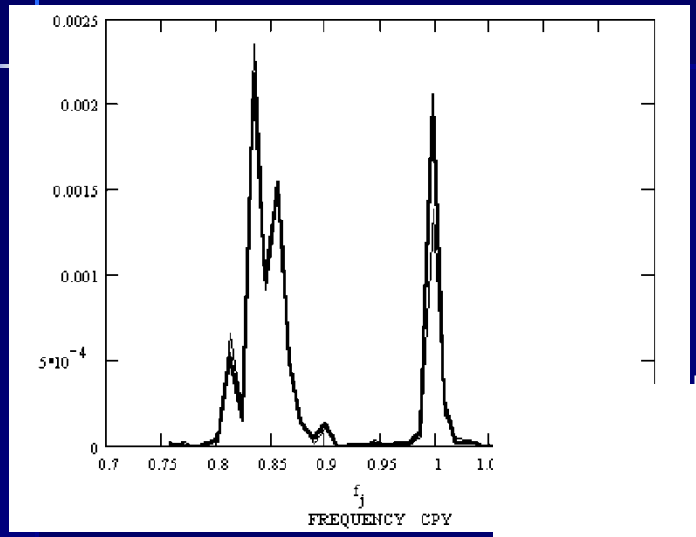


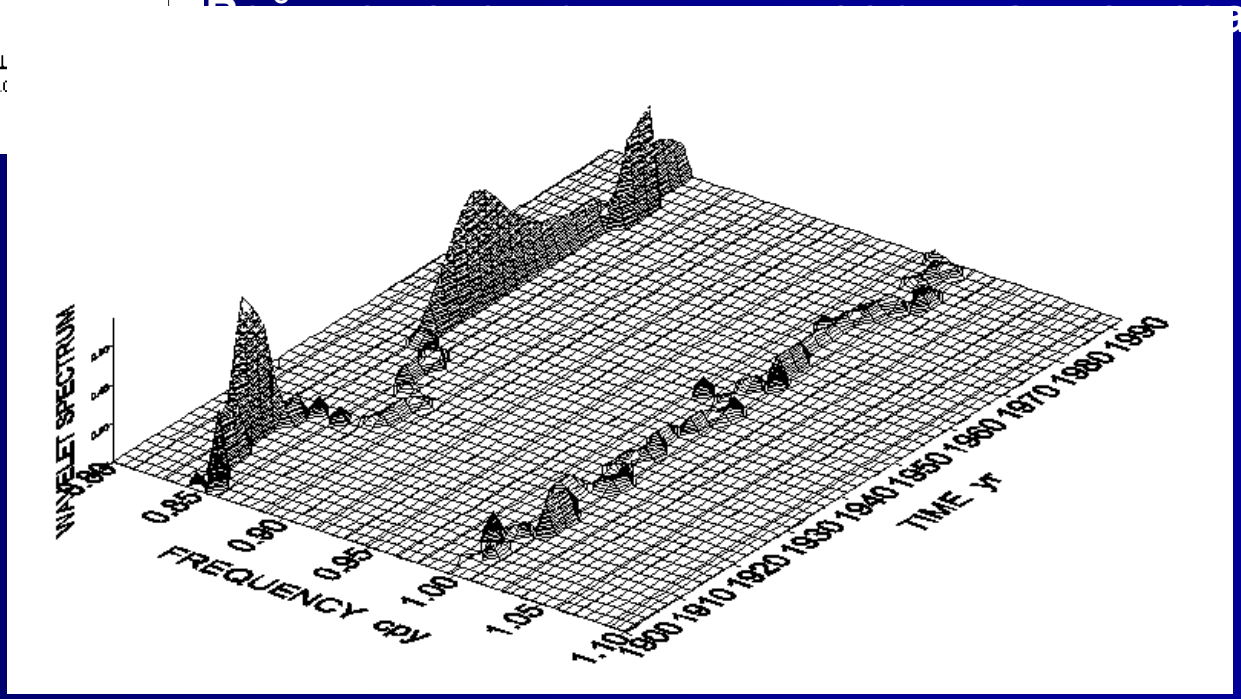
ДВИЖЕНИЕ ПОЛЮСА в 1840 – 2007 гг. (IERS , C01)





Фурье-спектры x- и y- координат полюса





Вейвлеты на плоскости

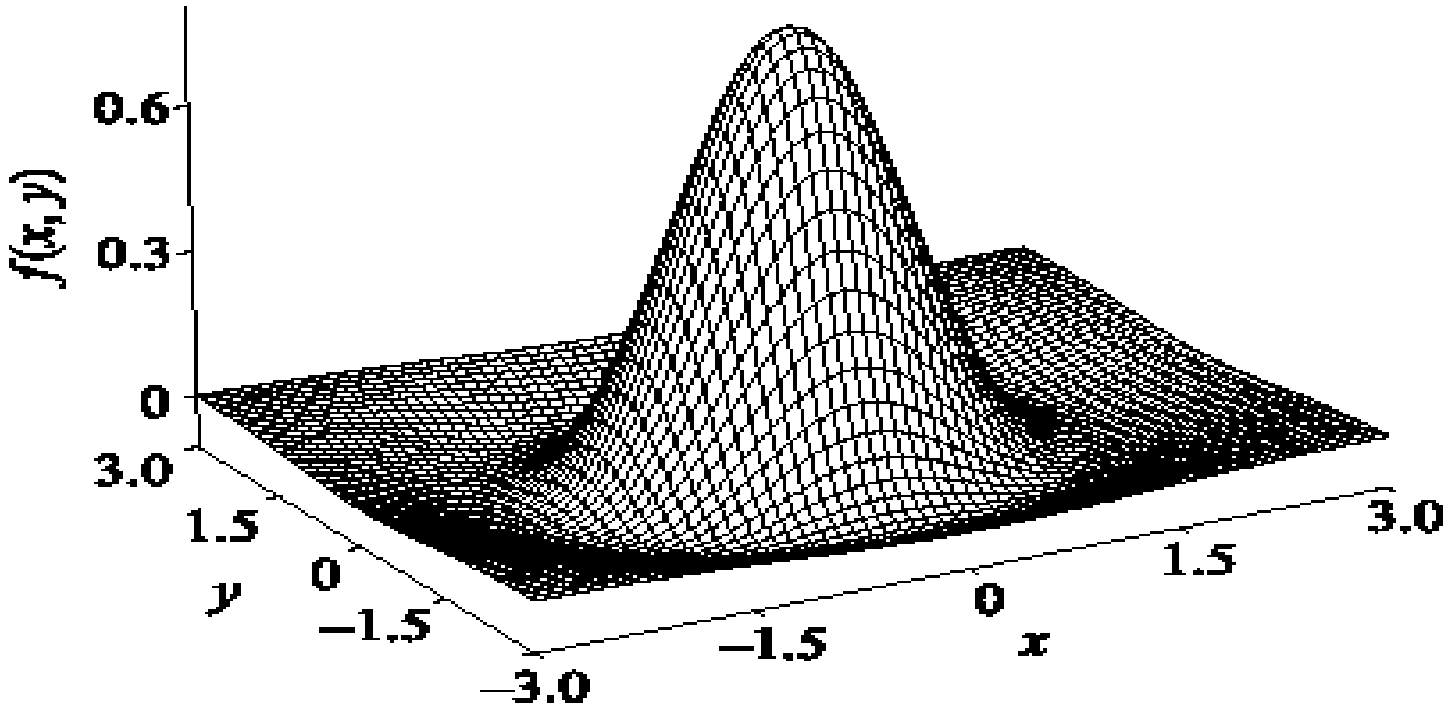


Рис.3. Вейвлет Марра (3) с параметрами $R = 1, b = 0$

ВЕЙВЛЕТЫ НА СФЕРЕ

$$W_\psi^s(a,\rho) \equiv \int_{S^2} \mathrm{d}\Omega\, \psi^*_{a,\rho}(\omega)\, s(\omega) = \langle \psi_{a,\rho} \mid s \rangle$$

$$s(\omega) = \int_{\mathrm{SO(3)}} \mathrm{d}\rho \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}a}{a^3}\, W_\psi^s(a,\rho)\, [R(\rho) L_\psi \psi_a](\omega)$$

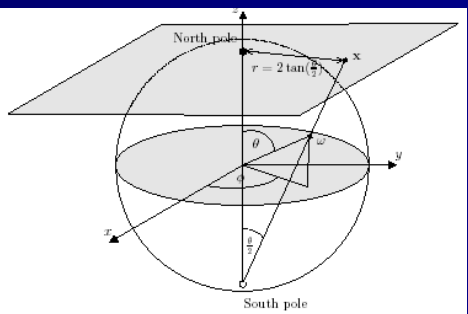
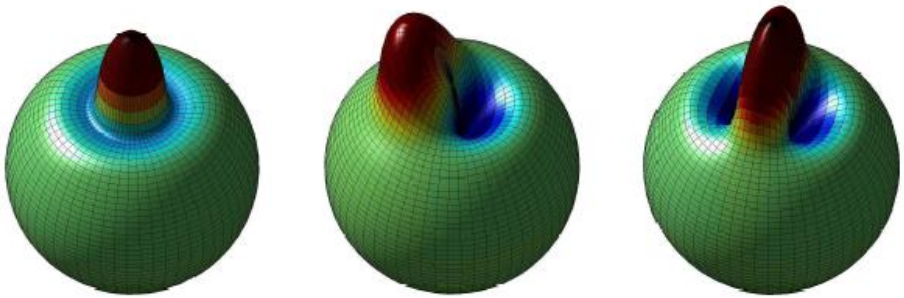


Fig. 1. Stereographic projection of the sphere onto the plane.

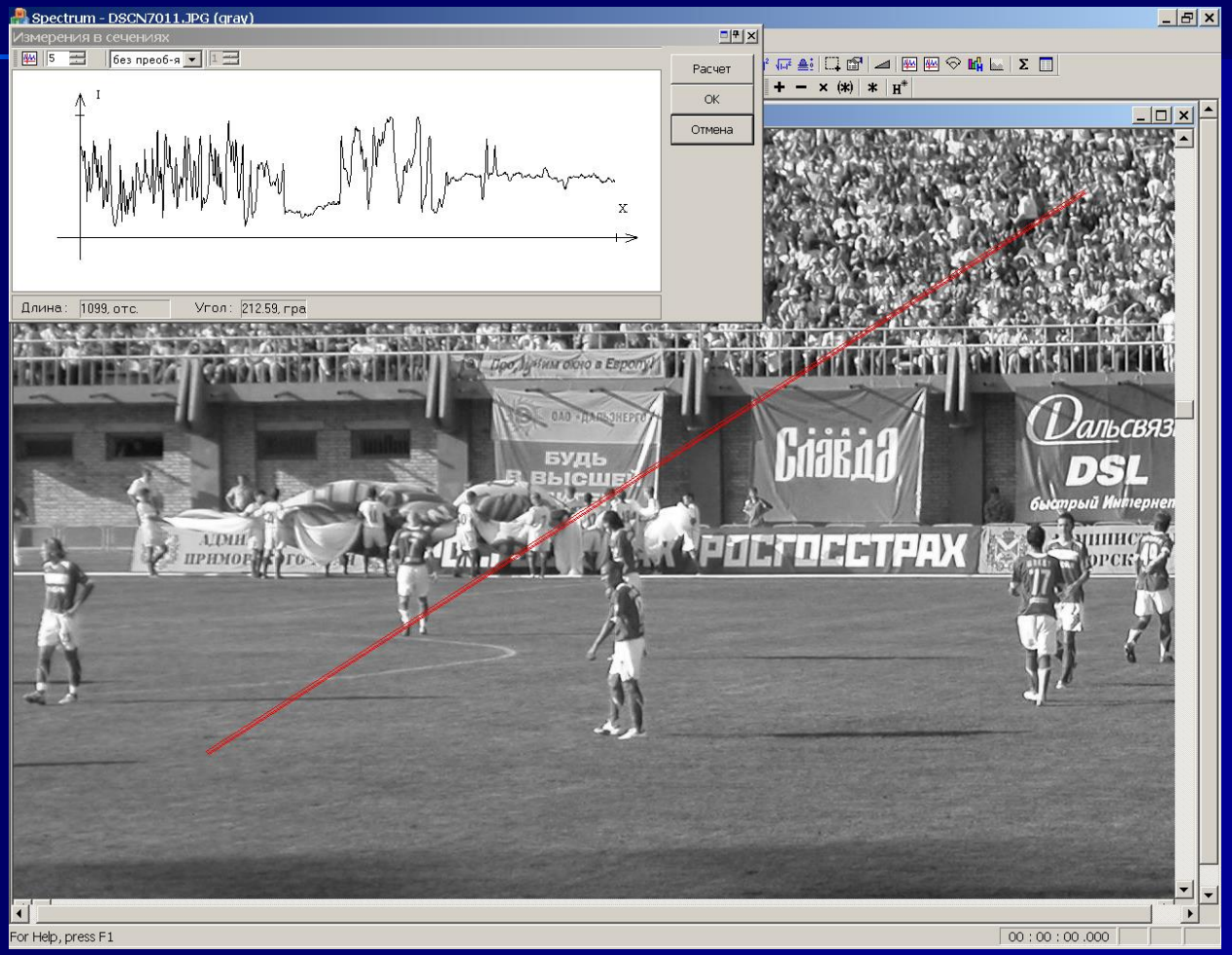


(a) SMHW (b) SBW (c) S2GDW

Figure 3. Spherical wavelets at scale $a = b = 0.2$.

Задача обработки изображений

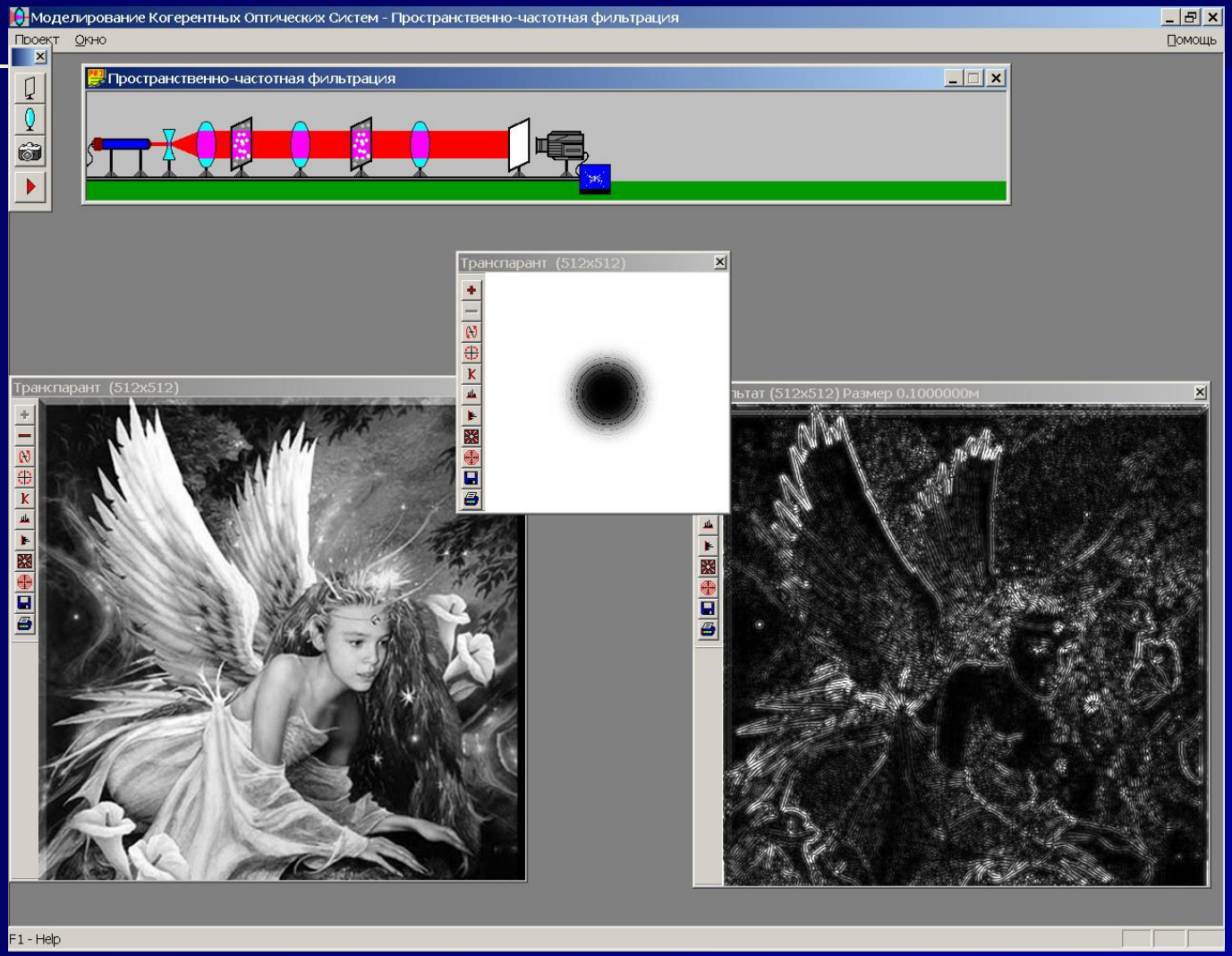
Изображение – функция двух переменных: f(x,y)



Обработка одномерных сечений – хорошо, но недостаточно

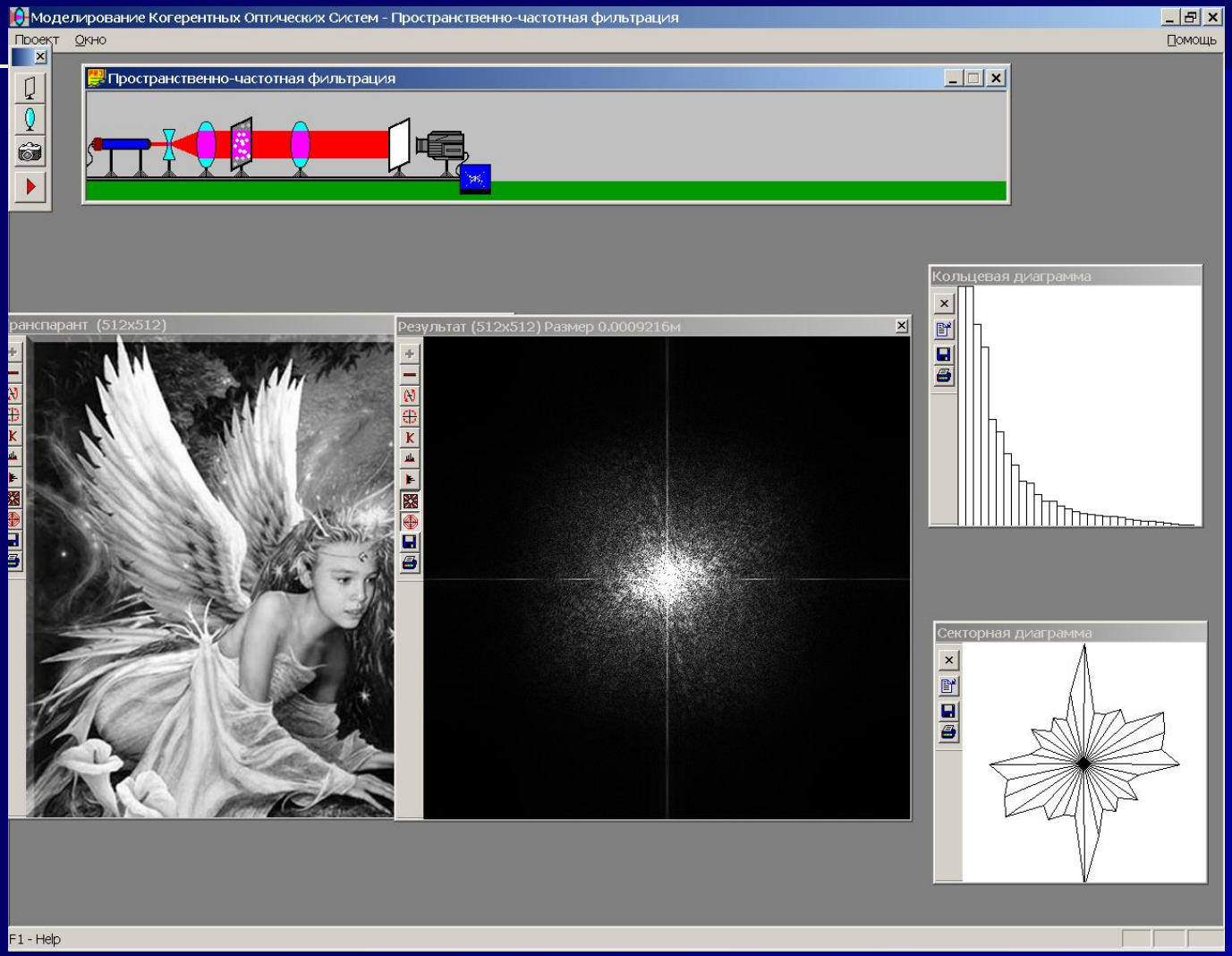
Оптическая обработка изображений

Когерентный оптический процессор (схема ПЧ- фильтрации)



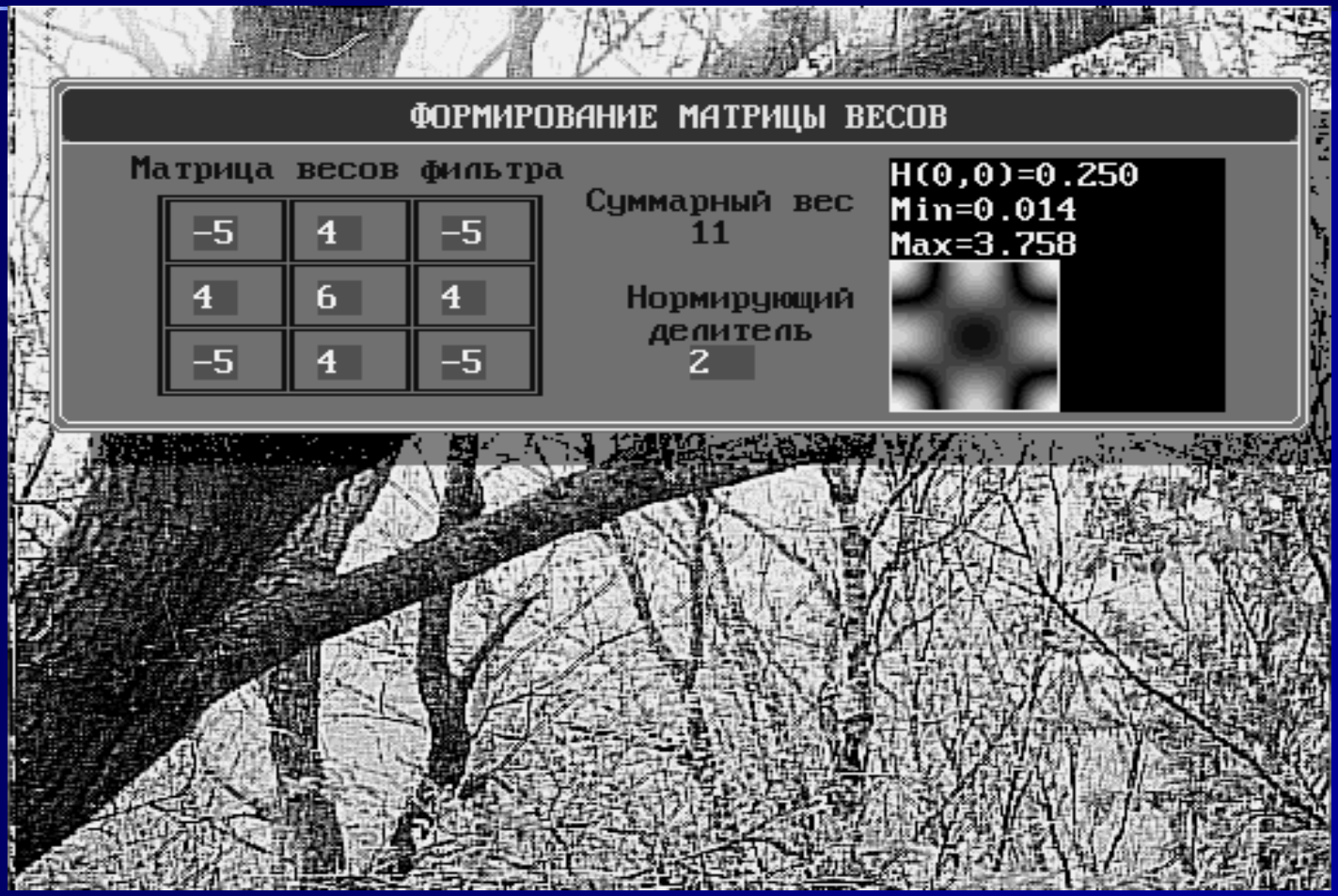
Оптическая обработка изображений (2)

Когерентный спектранализатор



Линейная пространственная фильтрация

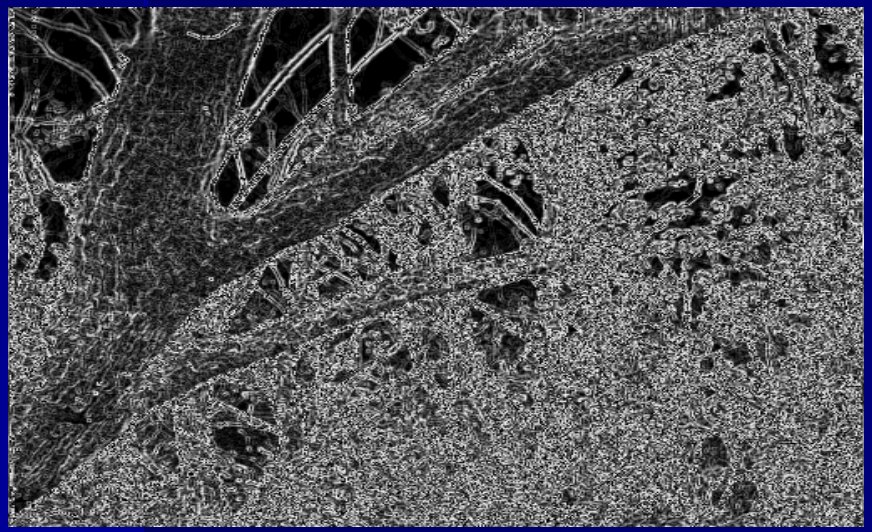
$$g_{ij} = \sum_{k,l=-m}^{m} a_{kl} f_{i-k,j-l}$$

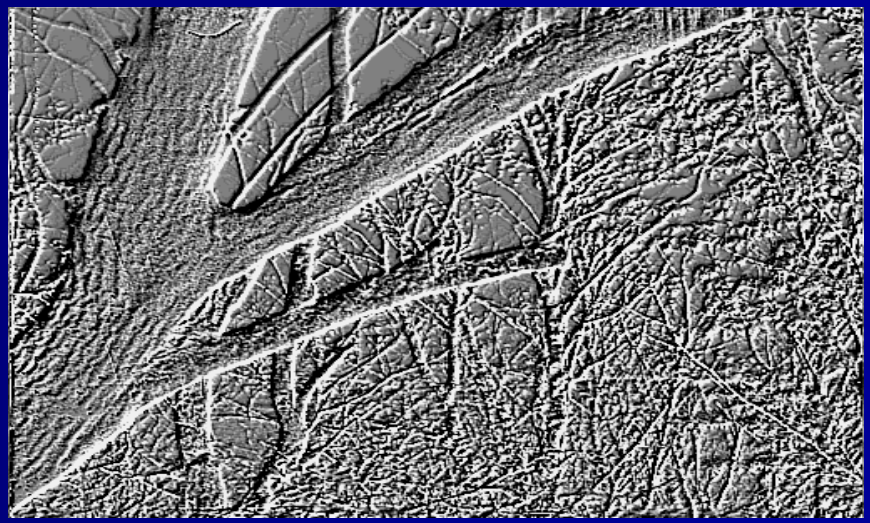


Линейная пространственная фильтрация (2)





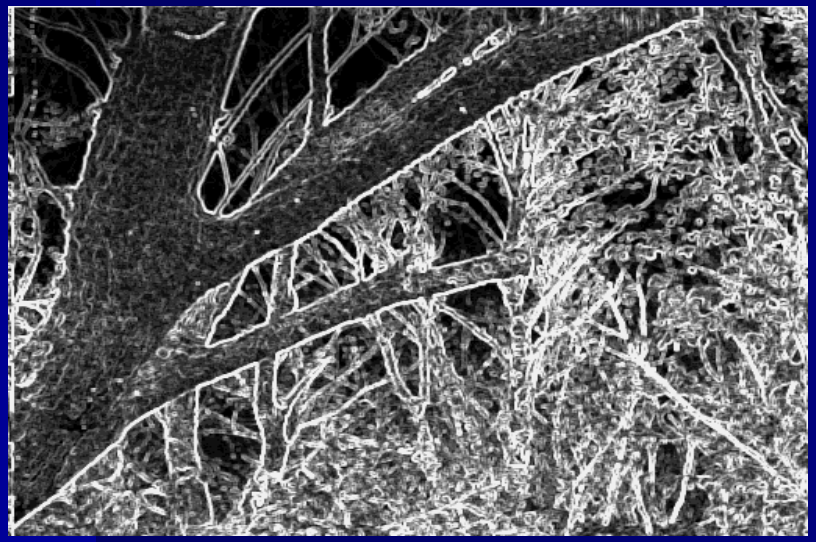




Нелинейная пространственная фильтрация

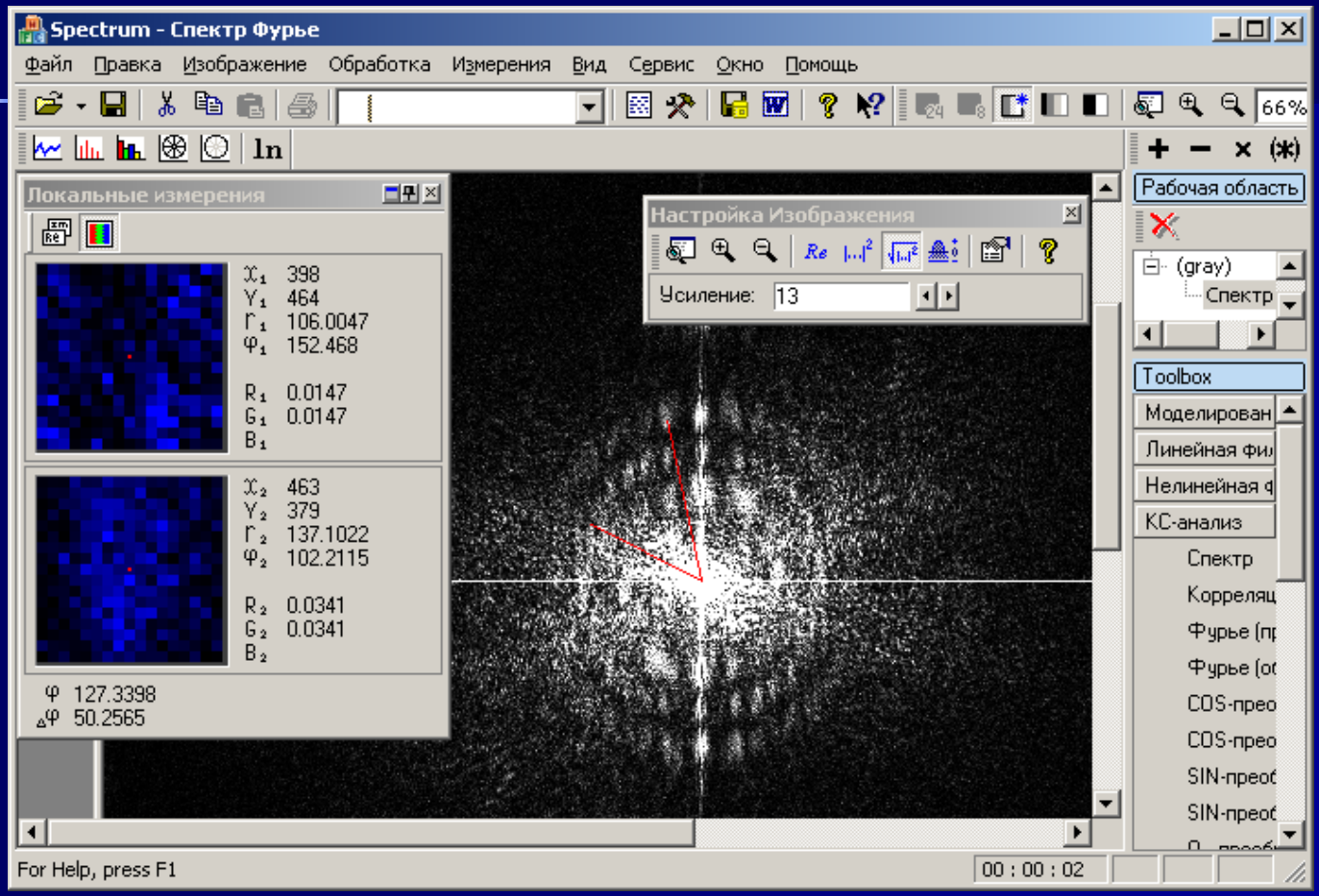




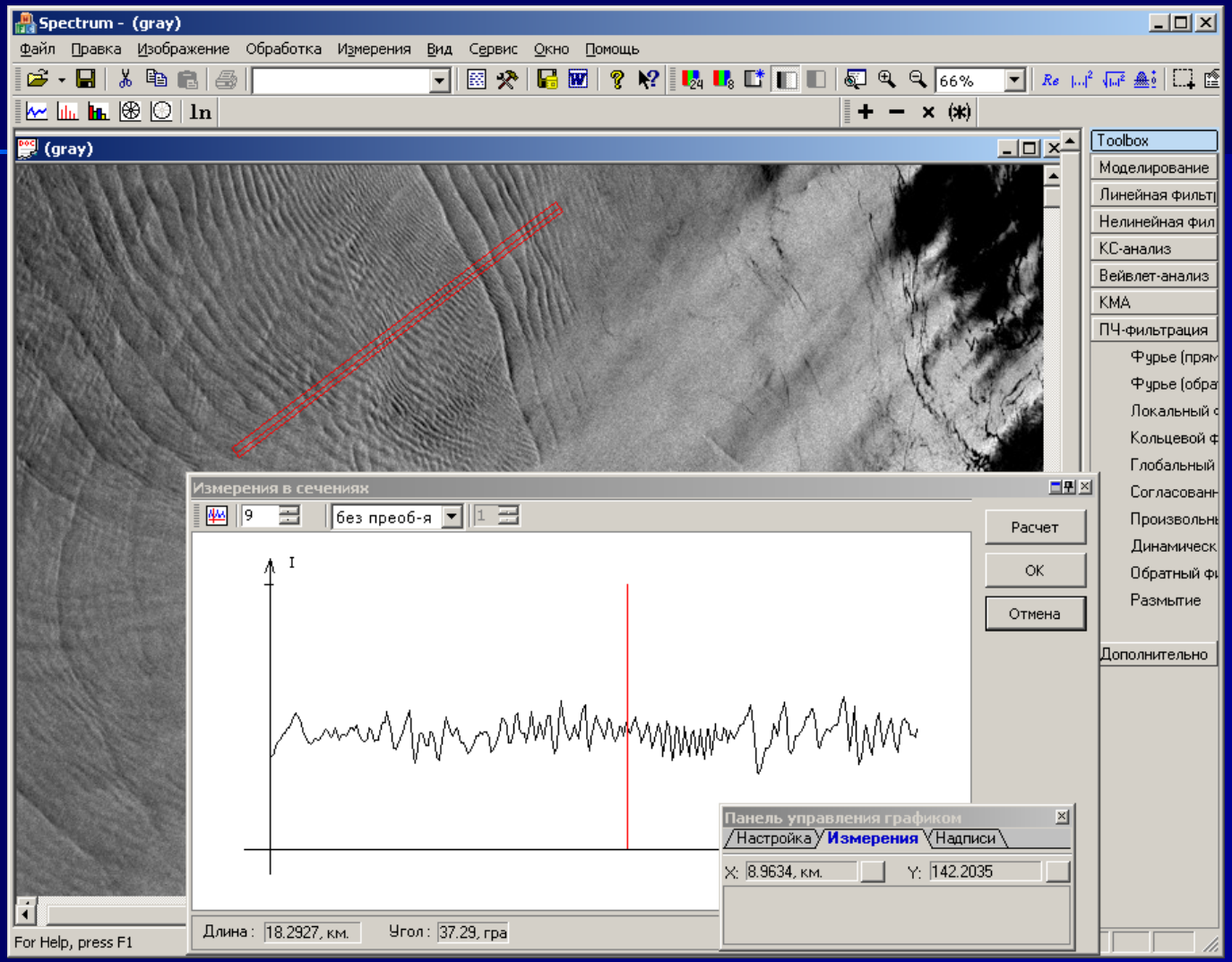




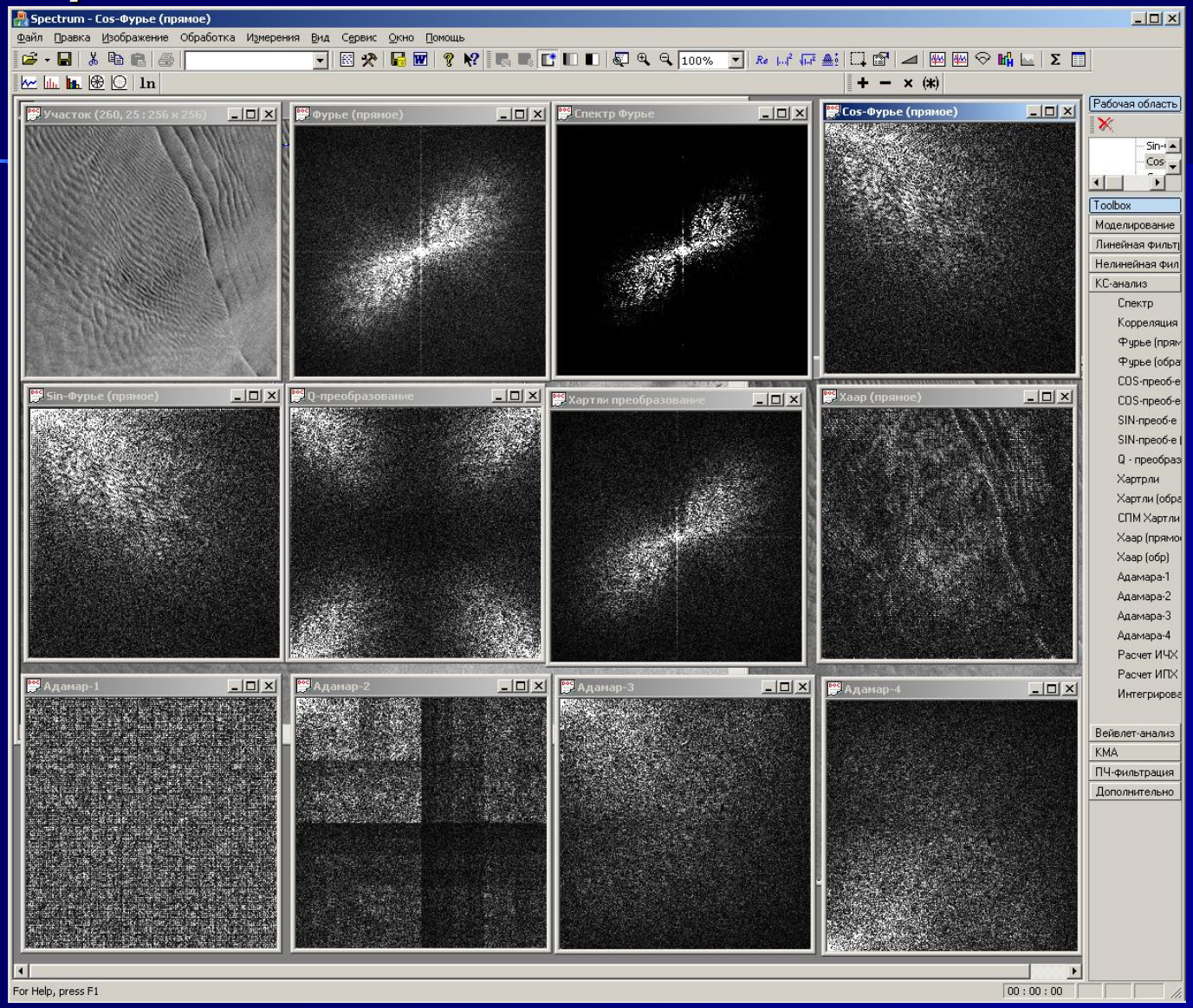
Локальные измерения двумерного Фурье спектра



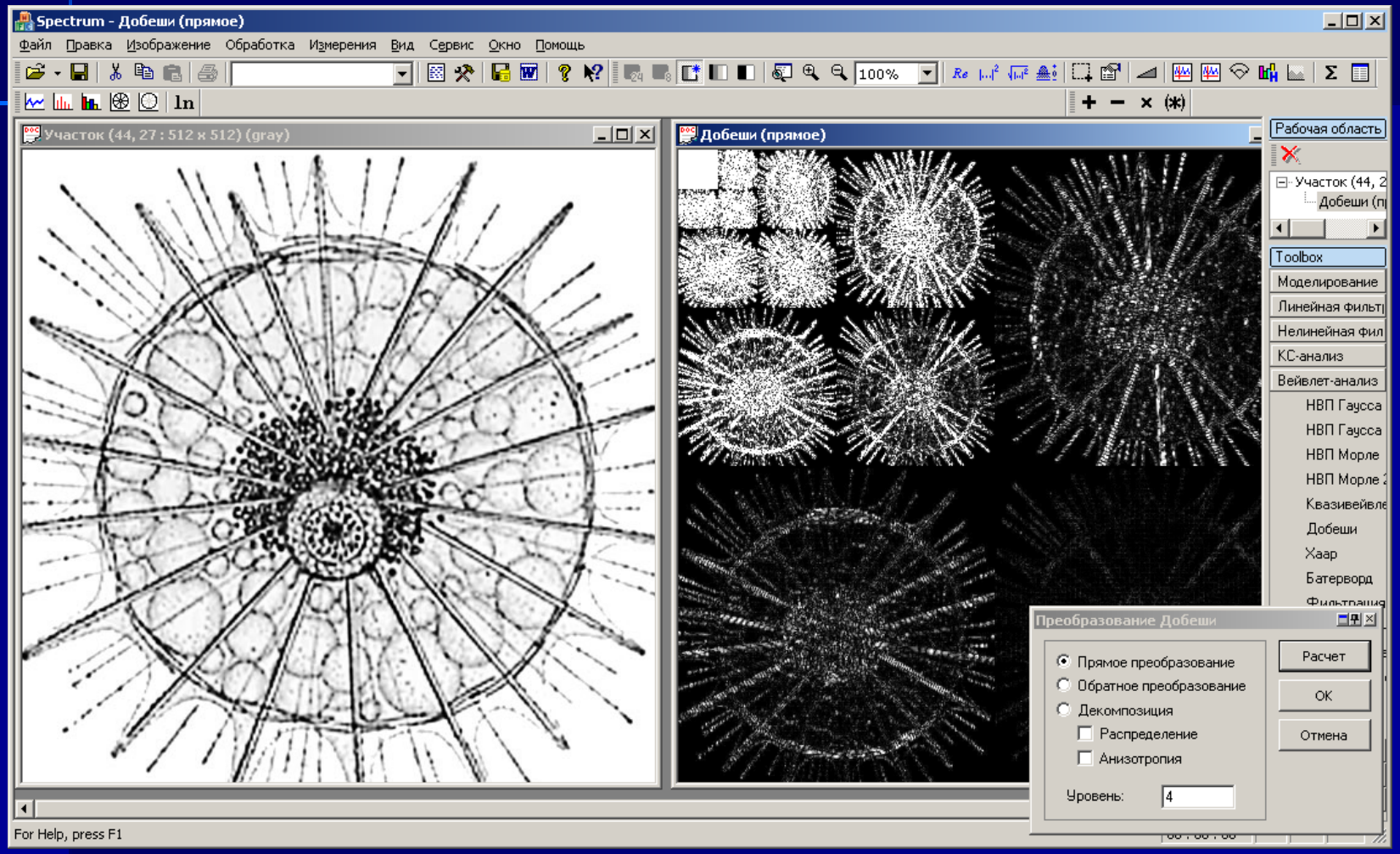
Измерения линейных сечений изображения



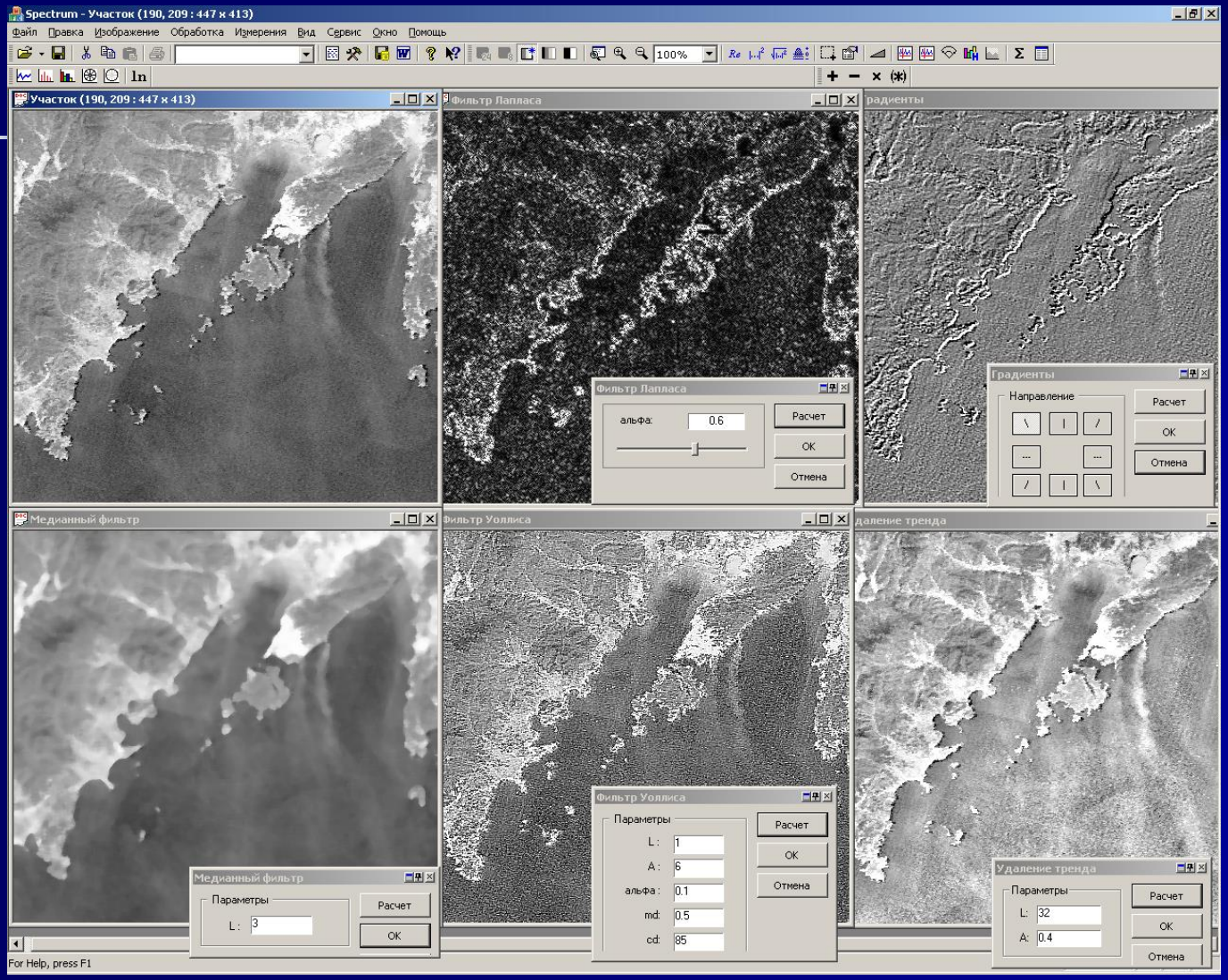
Изображение и его ортогональные преобразования



Вейвлет-преобразование Добеши изображения скелета радиолярии

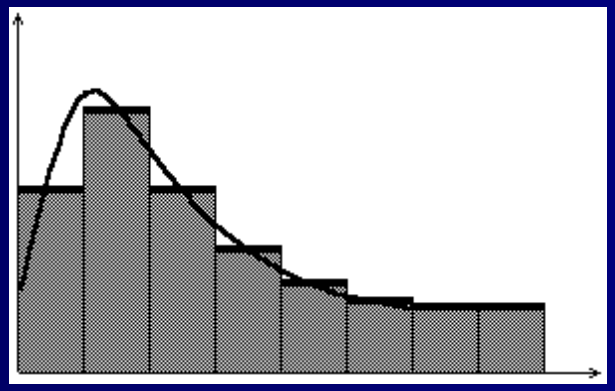


Пространственная фильтрация

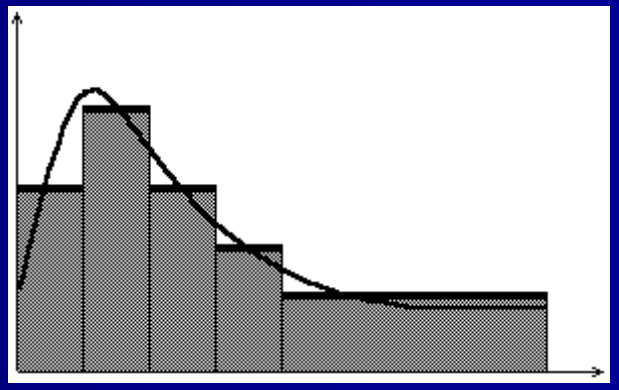


Сжатие информации

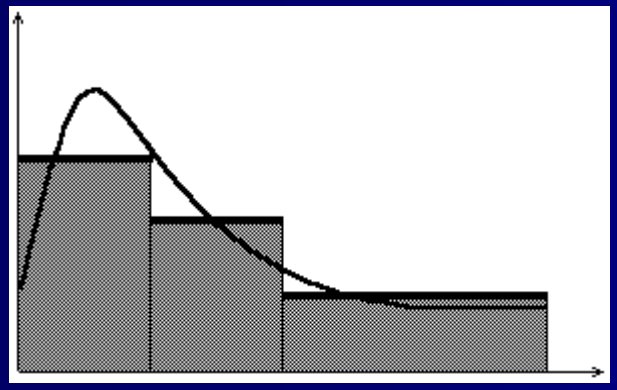
Сжатие информации (вейвлеты Хаара)



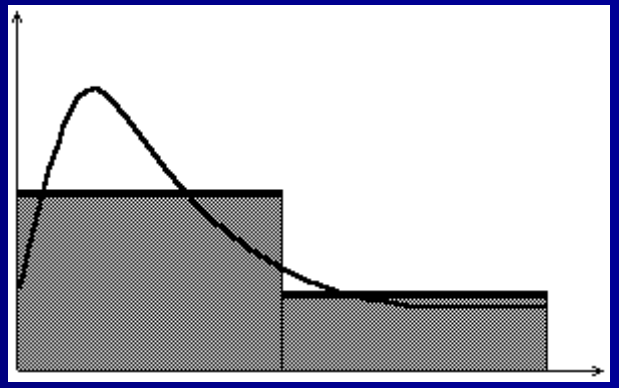
8 из 8



6 из 8

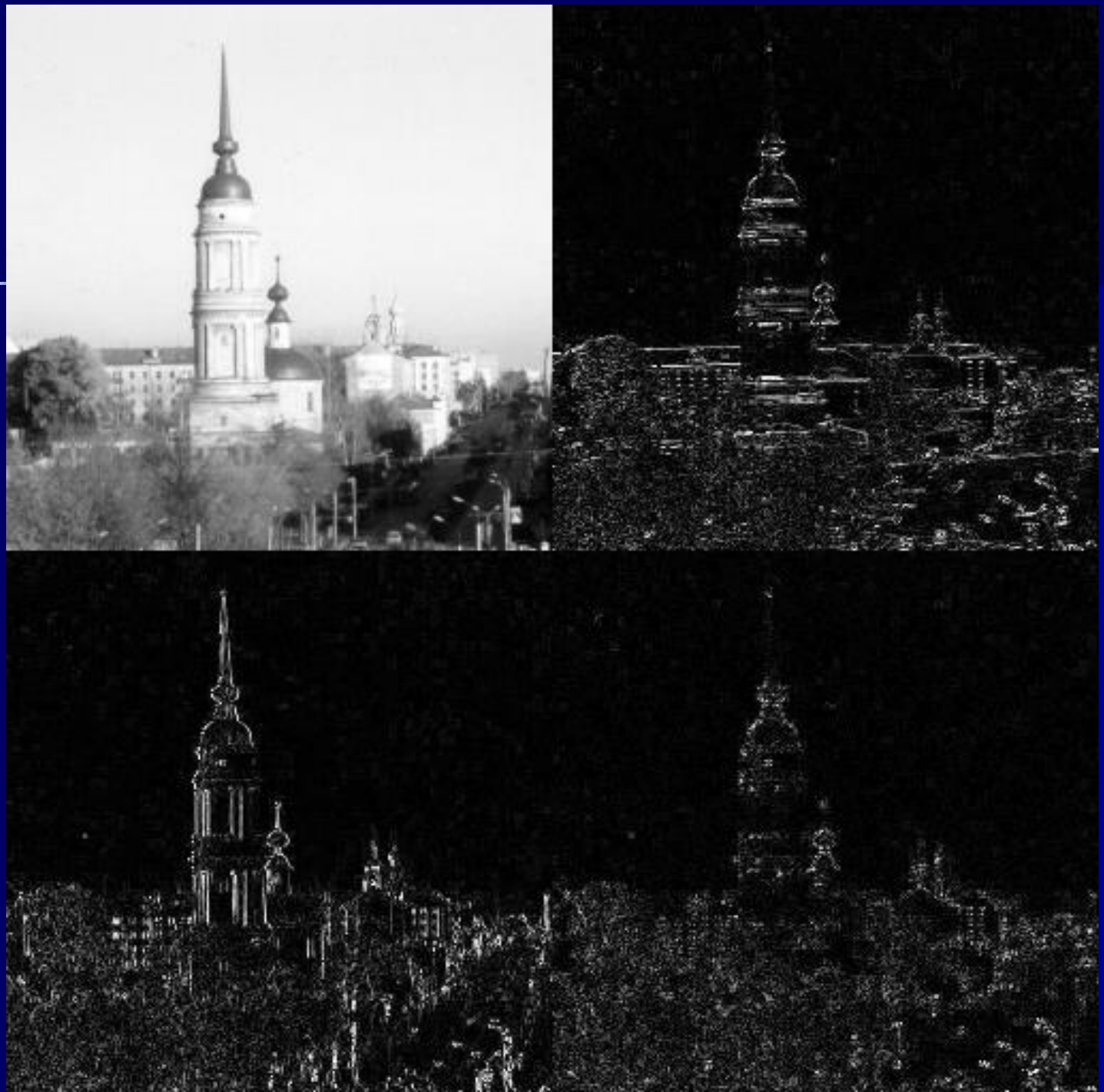


3 из 8

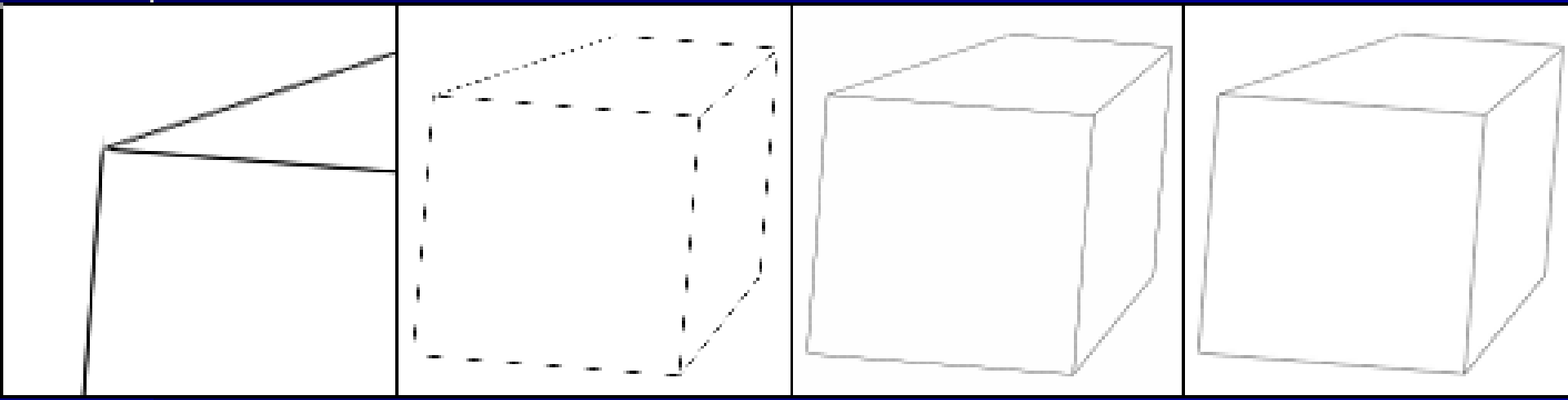


2 из 8

Обработка растровых изображений

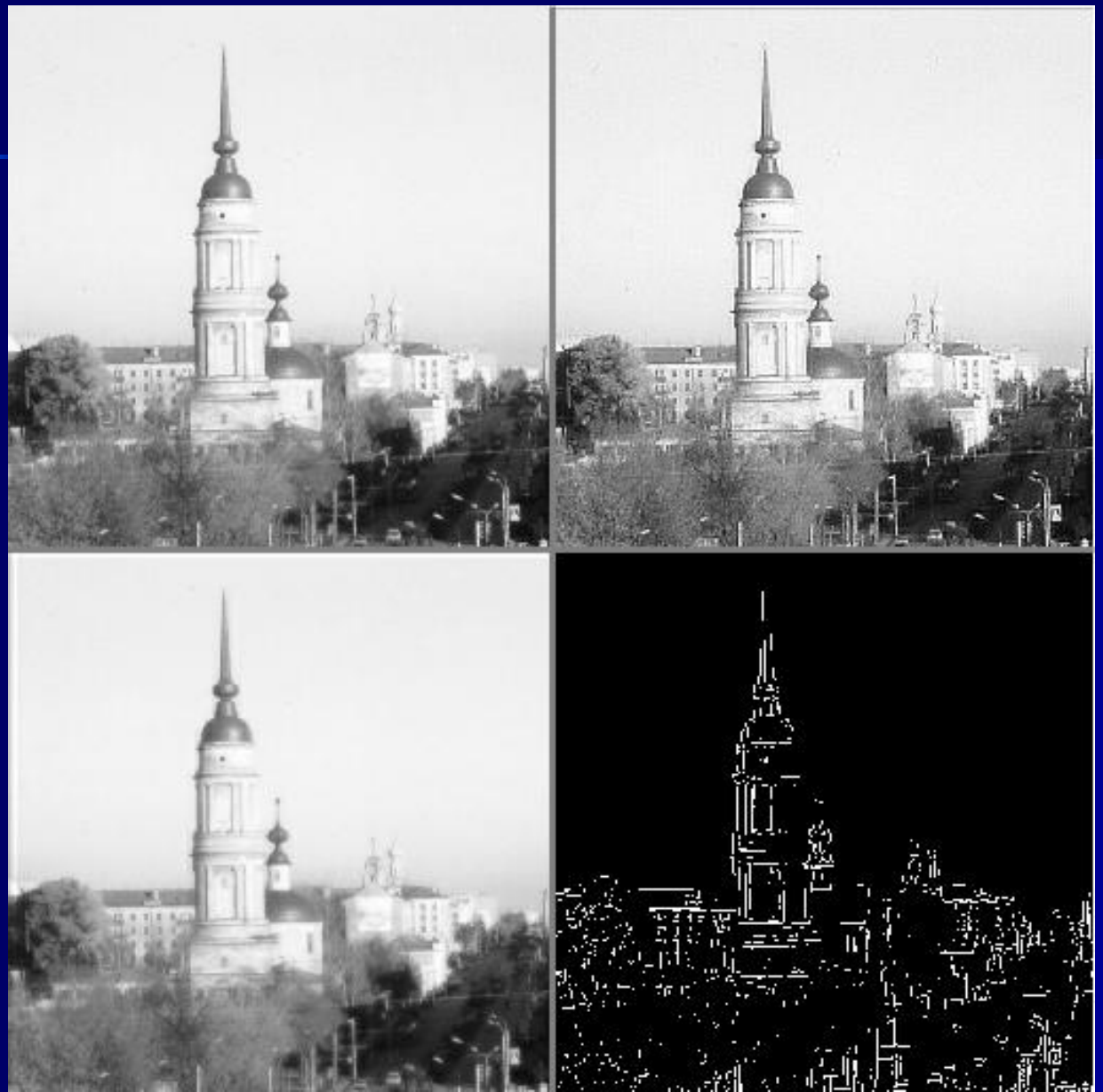


Масштабирование



Исходное изображение уменьшили в 4 раза простым прореживанием, с помощью преобразования Хаара, с помощью преобразования Добеши D4.

Изменение четкости, выделение перепадов...



Локальная обработка

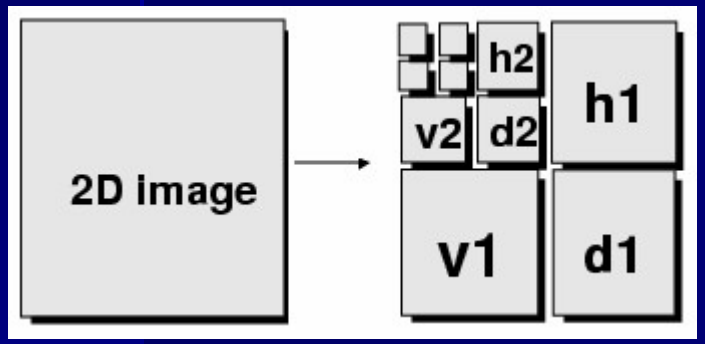


Вейвлет предварительной обработки для 2D-изображений



Быстрый алгоритм был разработан для 2D-всплесков. Применив Добеши с изображением на Слева мы получим следующее расширение вейвлет





Подводя итоги трех 2D-вейвлет-компонентов - Вертикальные, горизонтальные и диагональные
получаем вейвлет-преобразование независимых
на изображении изменчивость освещения, фона и размера.

Нижний ряд показывает результаты применения 2-го Порядка 2D-вейвлетов к лицу изображения верхнего ряда



Сжатие изображений



Фото восстановленное после вейвлет-сжатия до 3% от оригинала

Сжатие отпечатков пальцев позволяет хранить в базе данных только 2% исходных изображений



Оригинал

Восстановление после сжатия 26:1

Сжатие изображений 2



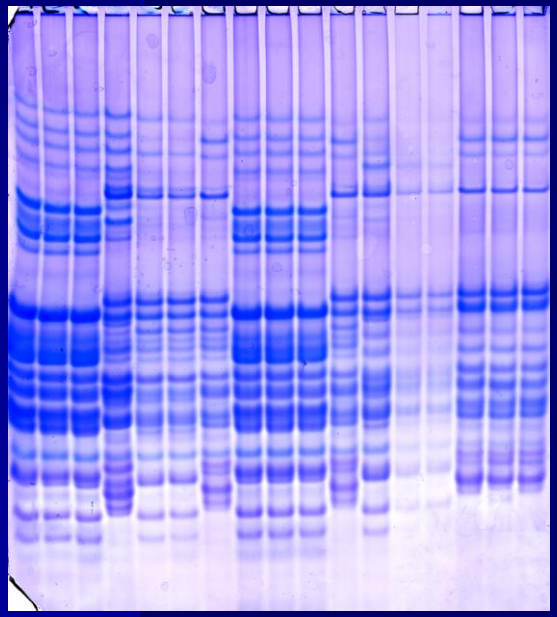
Исходное фото

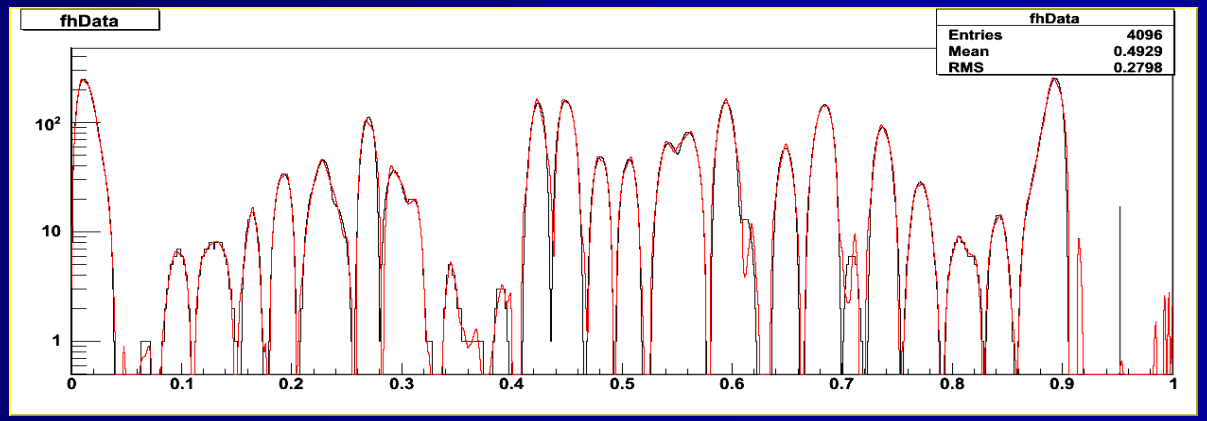


вейвлет-сжатие 80:1

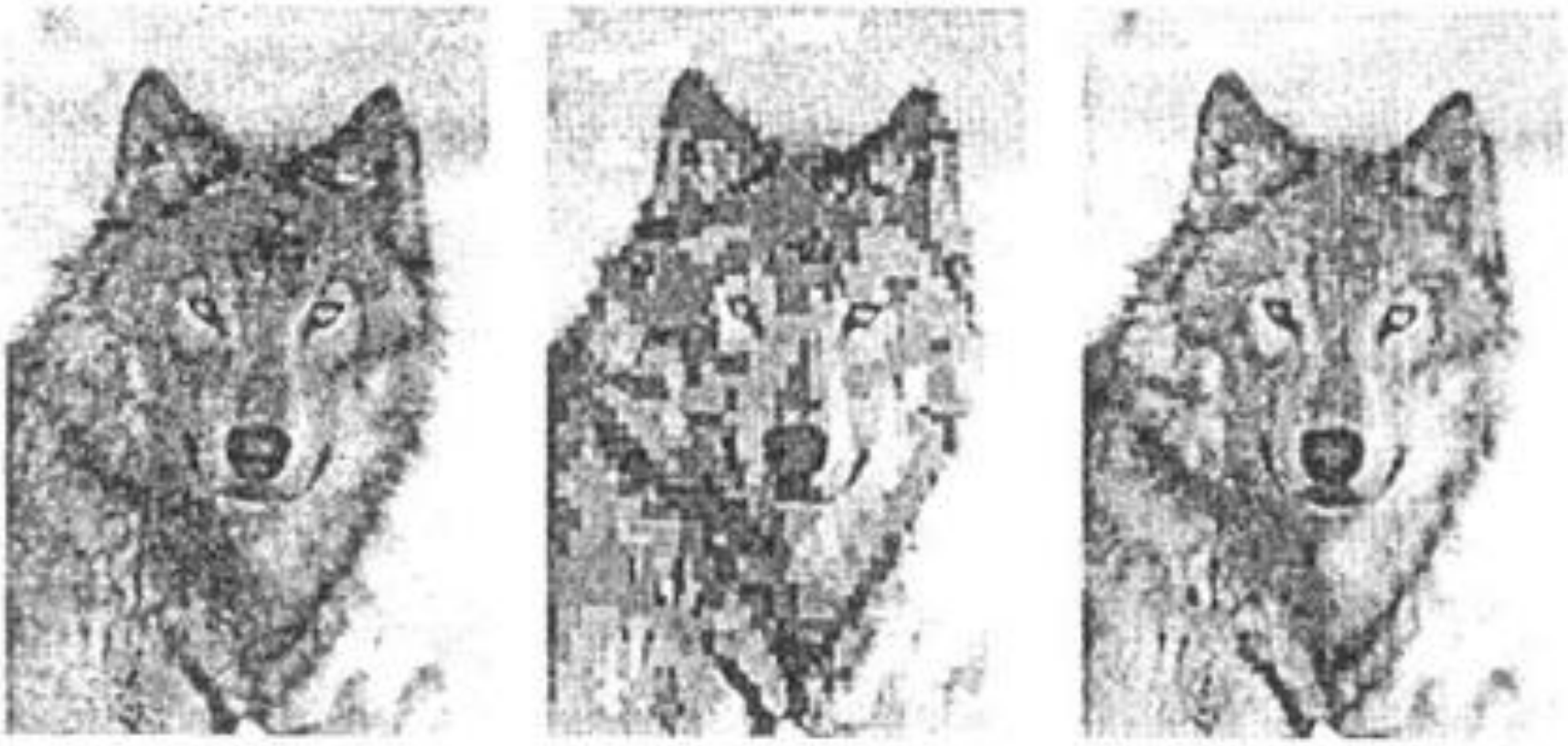


JPEG-сжатие





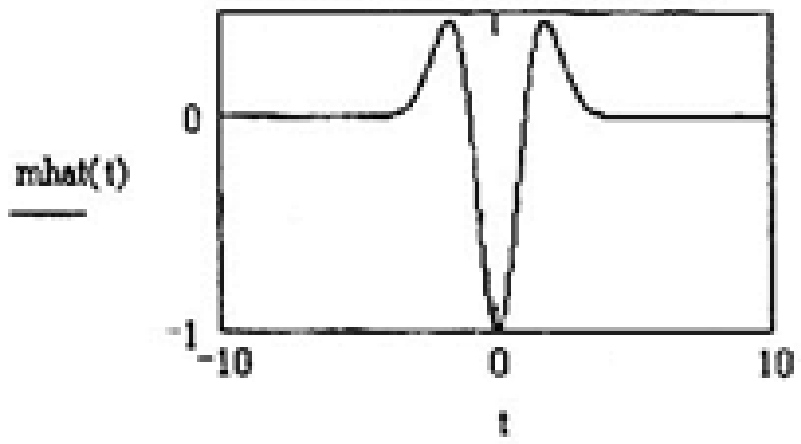
Задача классификации белков по их генетическому спектру: вейвлет-сжатие 4096 256 решило проблему ввода в нейронную сеть.



Примеры фотографий
с разной степенью сжатия, подготовленных в различных форматах

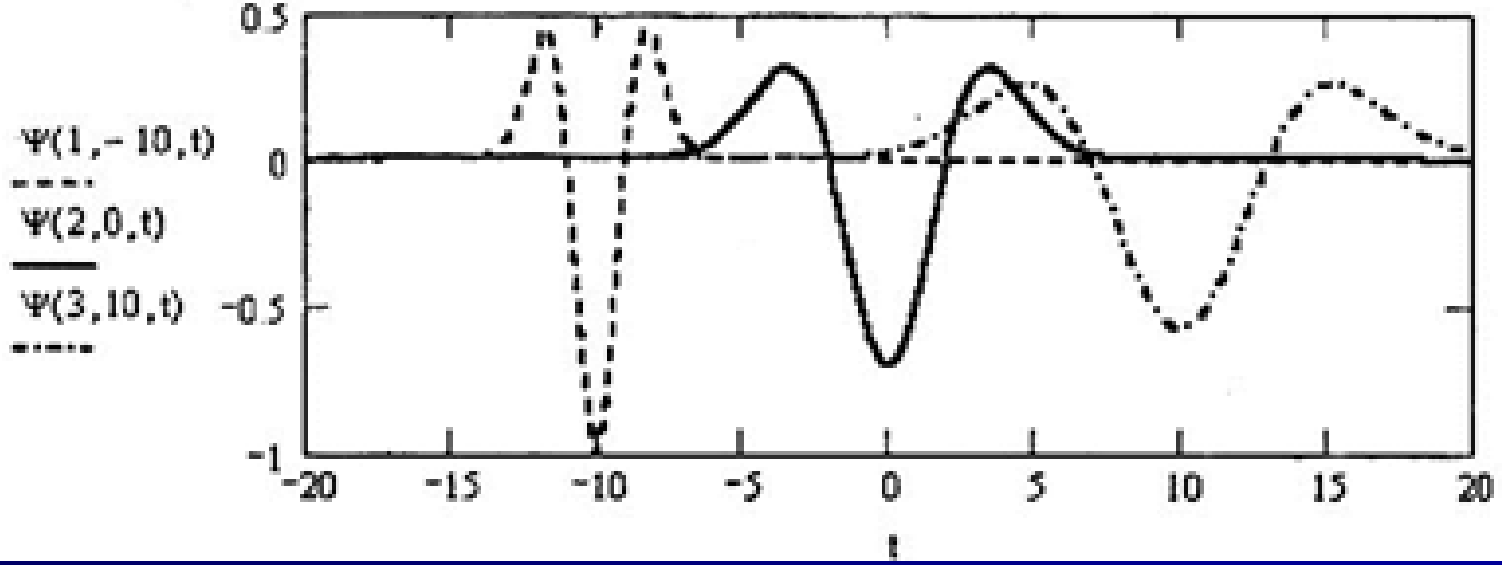
Вейвлет - "мексиканская шляпа"

$$\text{mhat}(t) := \frac{d^2}{dt^2}\exp\left(\frac{-t^2}{2}\right) \rightarrow -\exp\left(\frac{-1}{2}\cdot t^2\right) + t^2\cdot\exp\left(\frac{-1}{2}\cdot t^2\right)$$



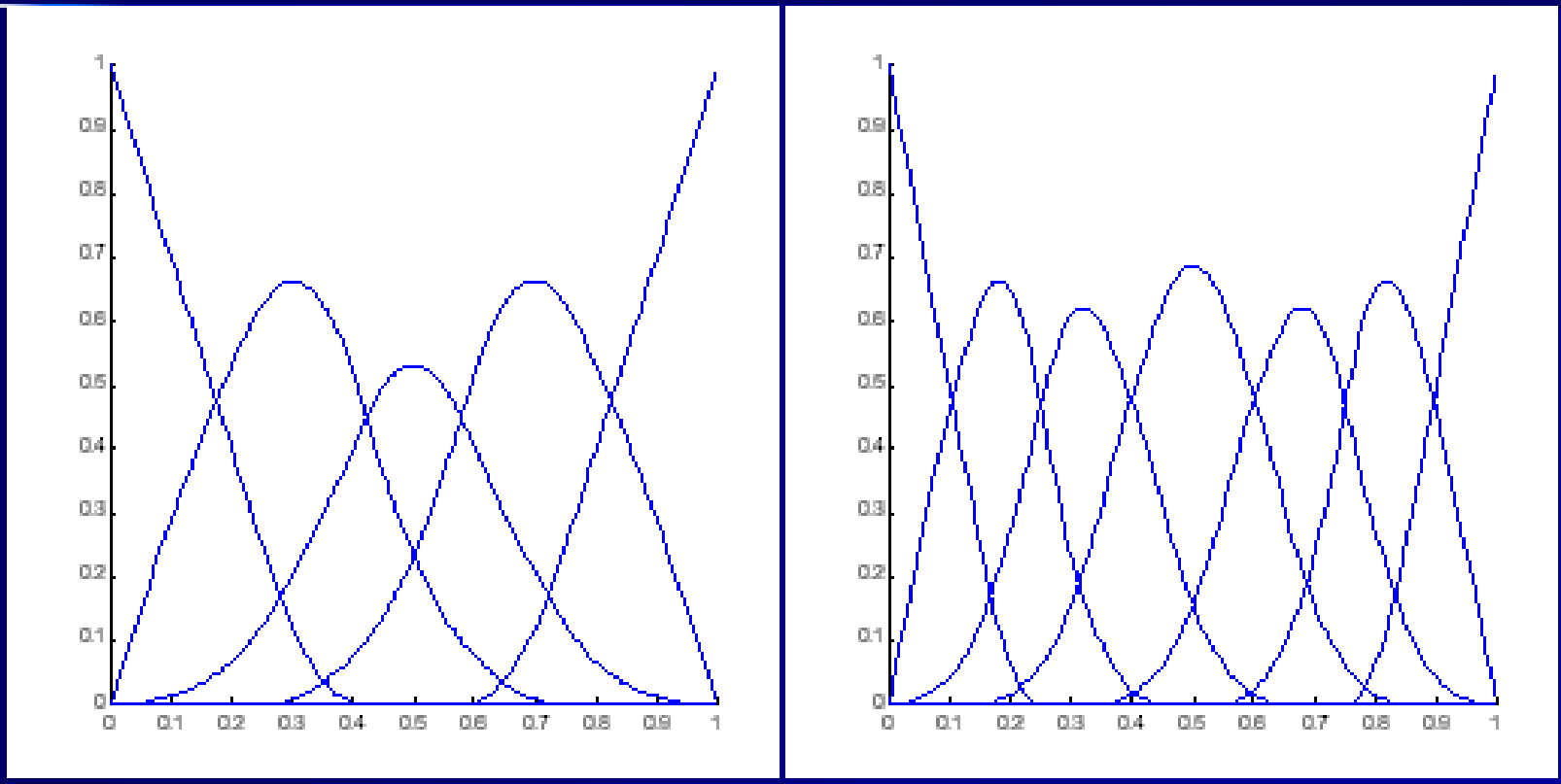
$$\Psi(a,b,t) := \frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\text{mhat}\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

$t := -20, -19.9 .. 20$



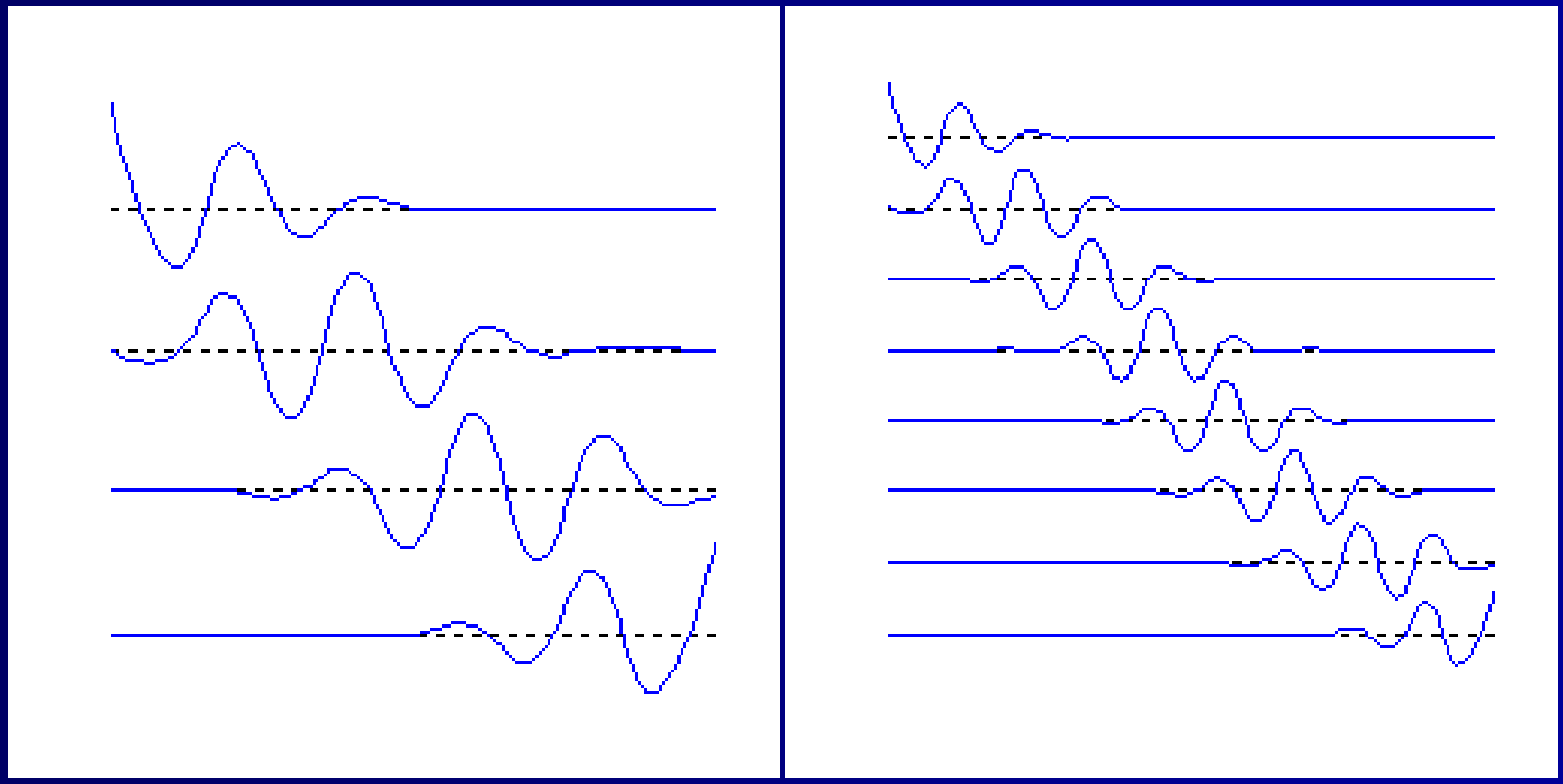
Обработка кривых

Сплайновые скейлинг-функции



B-сплайновые скейлинг-функции пространств $V^1(3)$ и $V^2(3)$

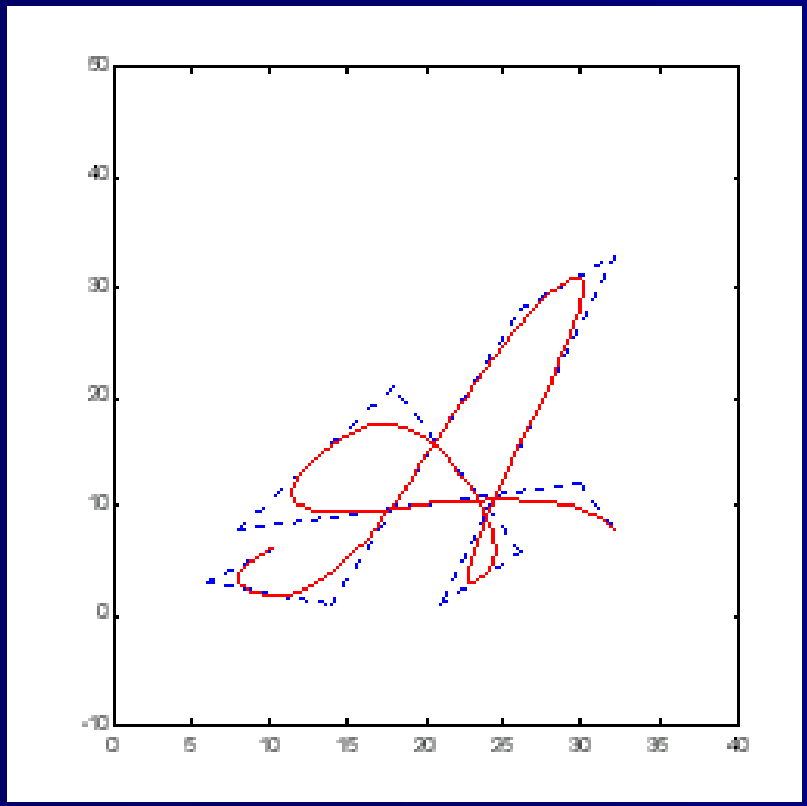
Сплайновые вейвлеты



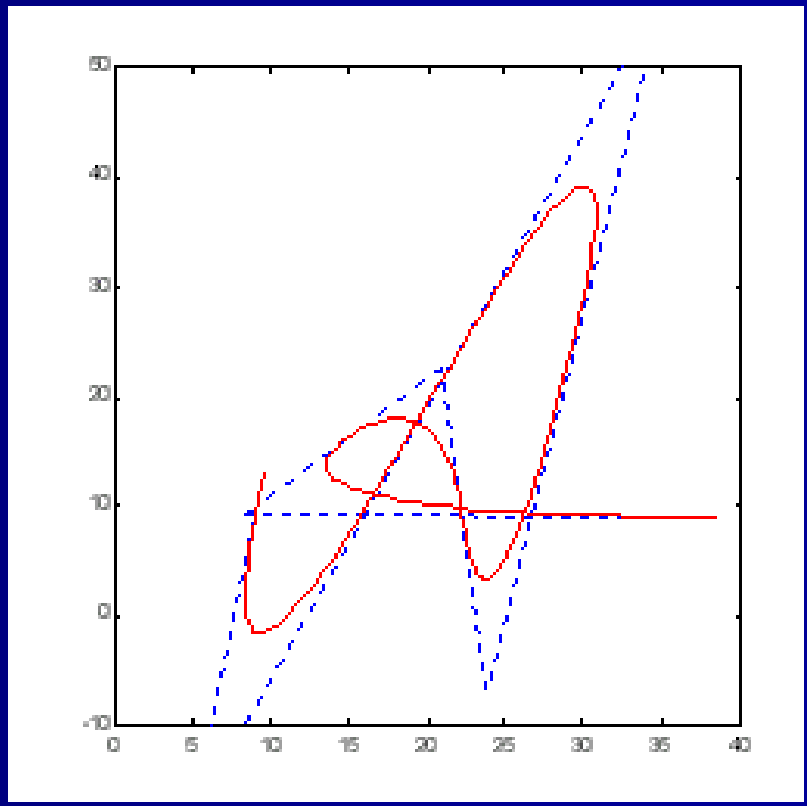
B-сплайновые вейвлеты пространств $W^2(3)$ и $W^3(3)$

Обработка кривых

- Сглаживание кривой



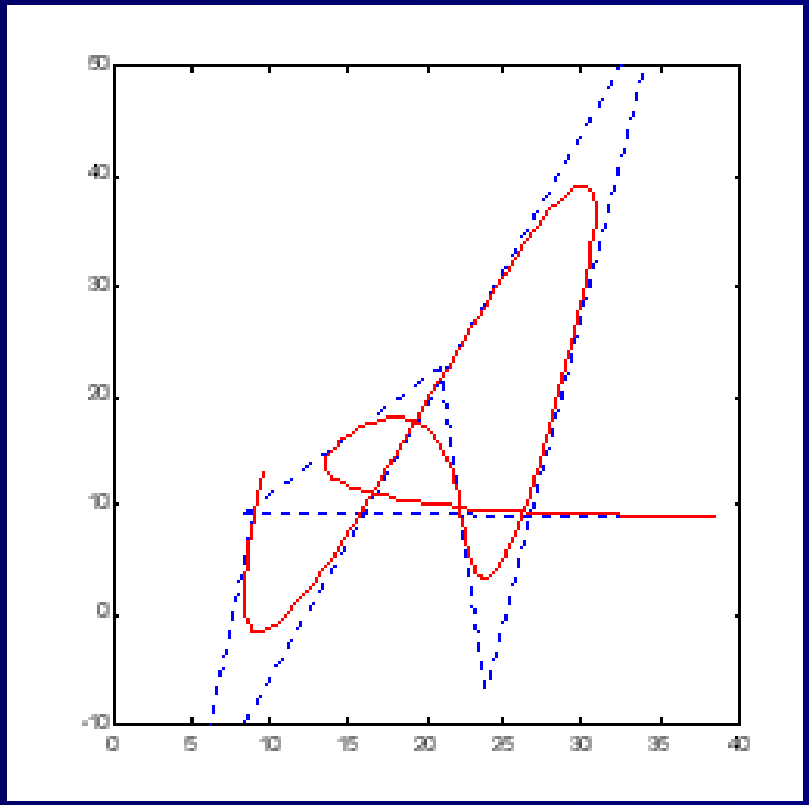
11 опорных точек



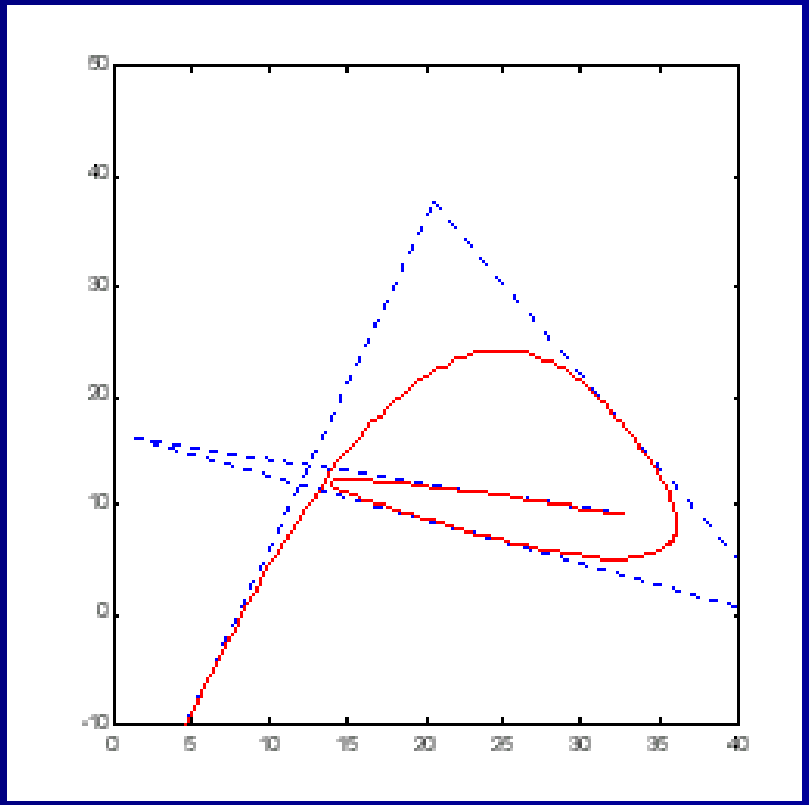
7 опорных точек

Обработка кривых

- Сглаживание кривой



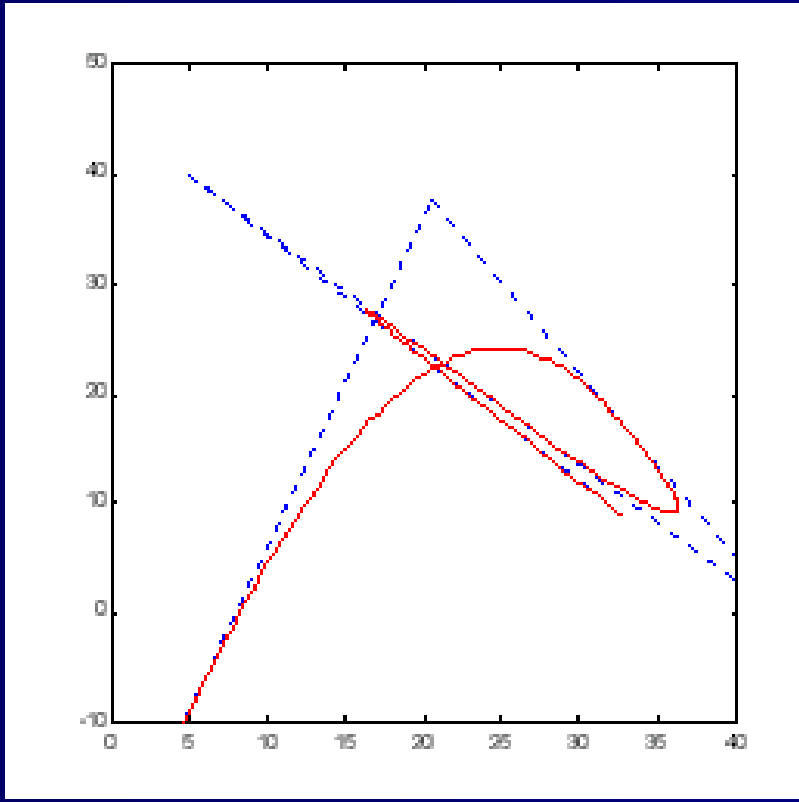
7 опорных точек



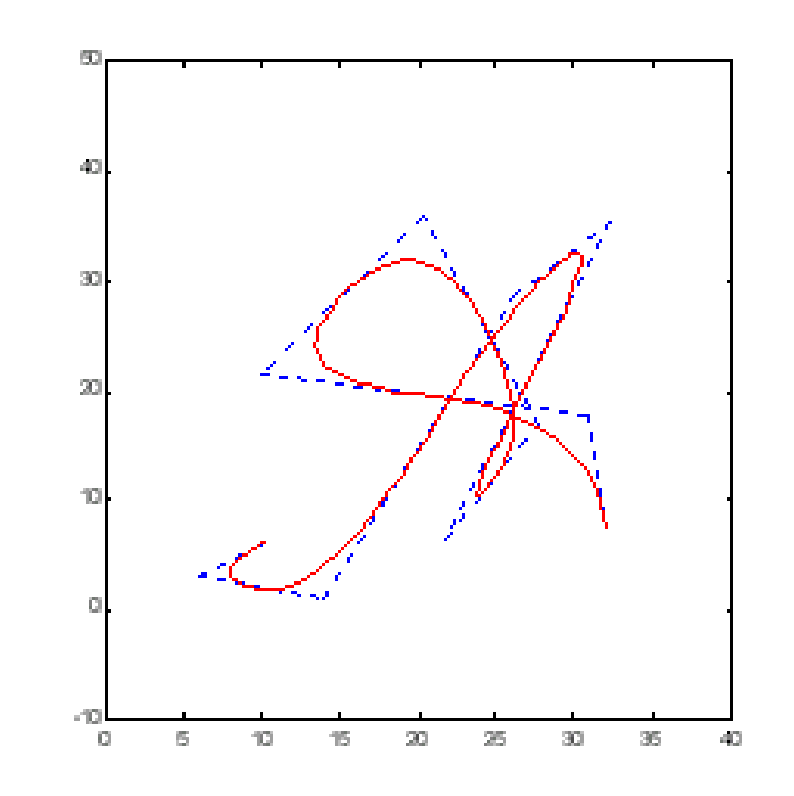
5 опорных точек

Обработка кривых

- Редактирование кривой (НЧ)



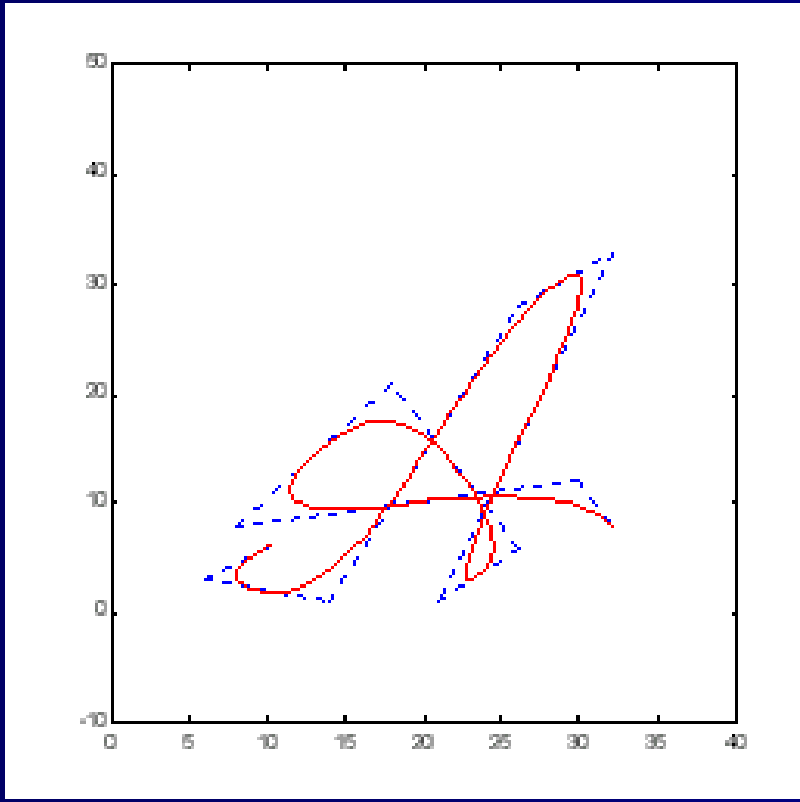
5 опорных точек



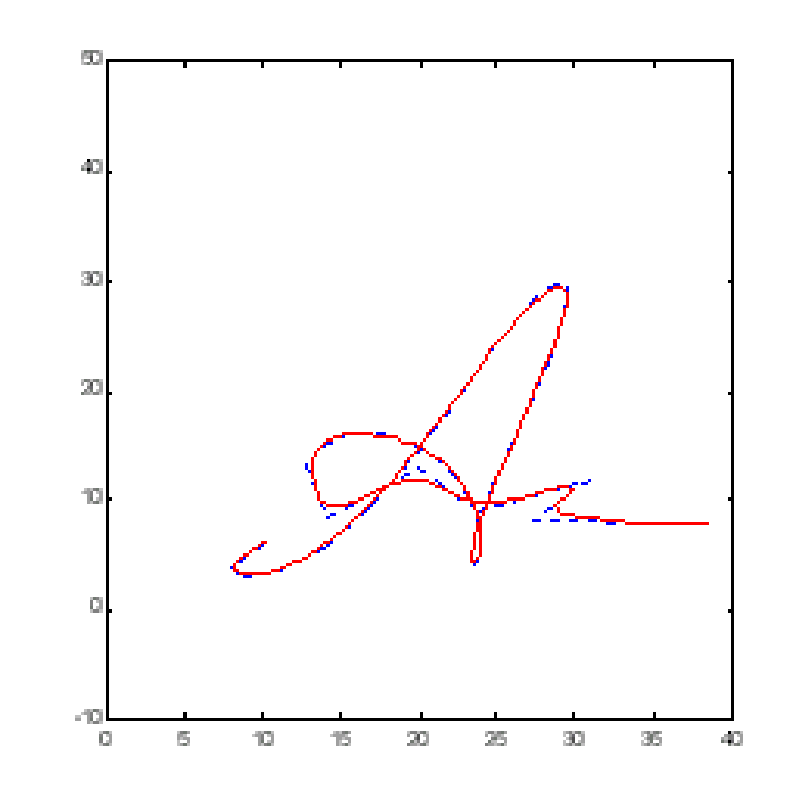
11 опорных точек

Обработка кривых

- Редактирование кривой (ВЧ)



11 опорных точек



35 опорных точек

Обработка 3D объектов

Вейвлет-анализ сплошных 3D объектов

Простейшее обобщение на трехмерный случай:

$$\varphi(x,y,z) = \varphi(x)\,\varphi(y)\,\varphi(z)$$

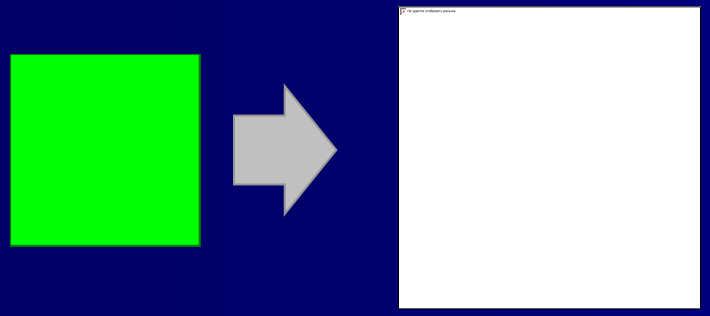
$$\psi_1(x,y,z) = \psi(x)\,\varphi(y)\,\varphi(z)$$

$$\psi_2(x,y,z) = \varphi(x)\,\psi(y)\,\varphi(z)$$

$$\dots$$

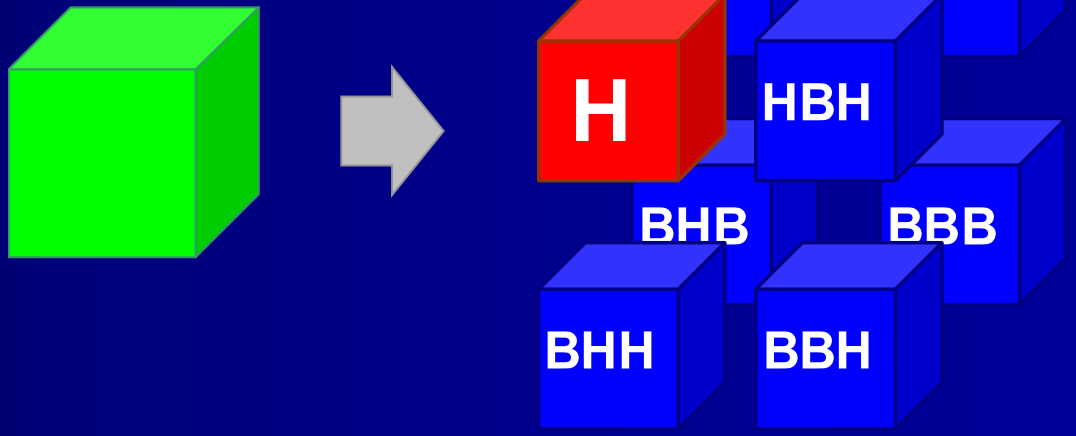
$$\psi_7(x,y,z) = \psi(x)\,\psi(y)\,\psi(z)$$

Вейвлет-анализ произвольных 3D объектов

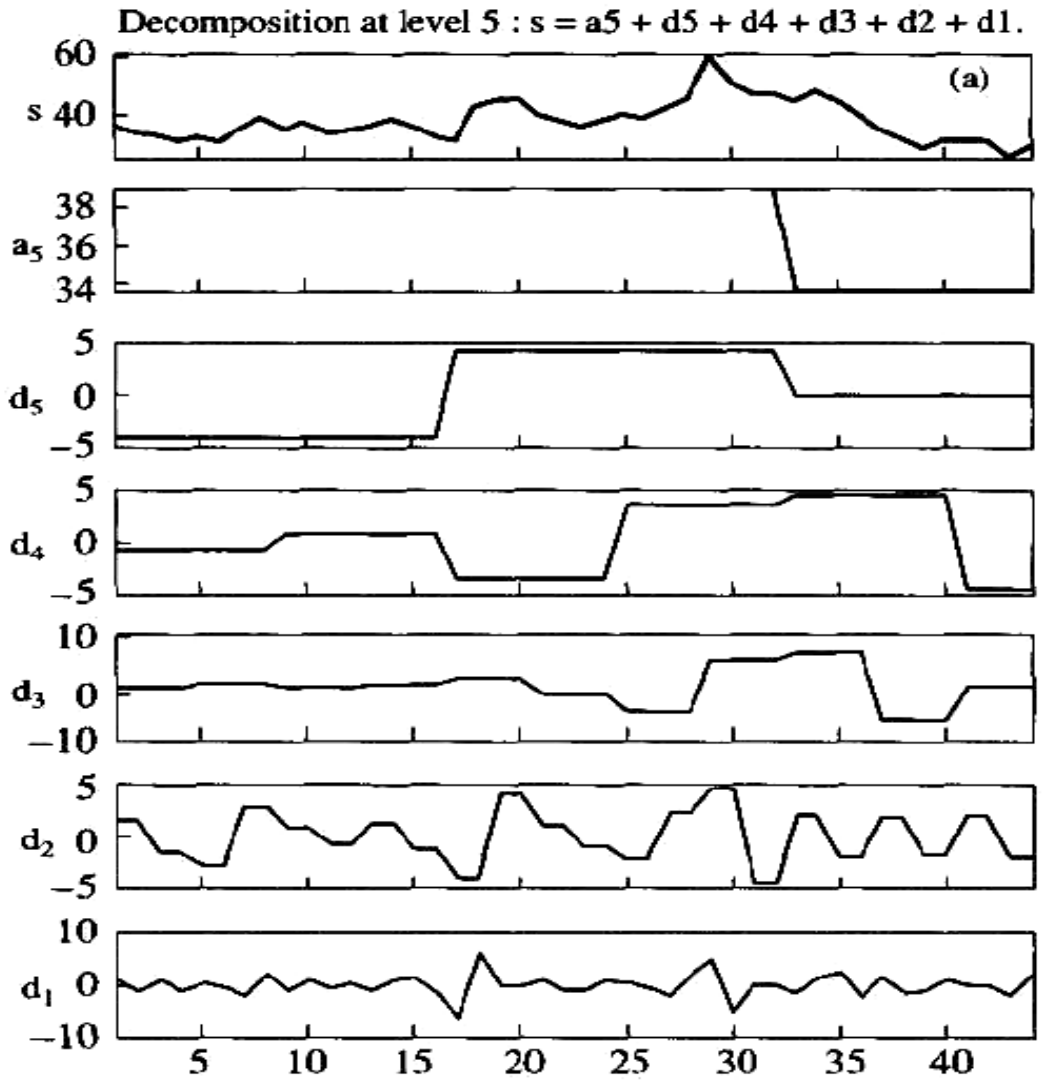


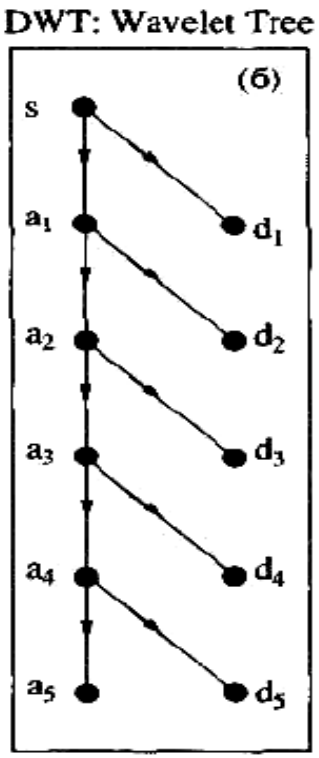
Сравнение декомпозиции на плоскости...

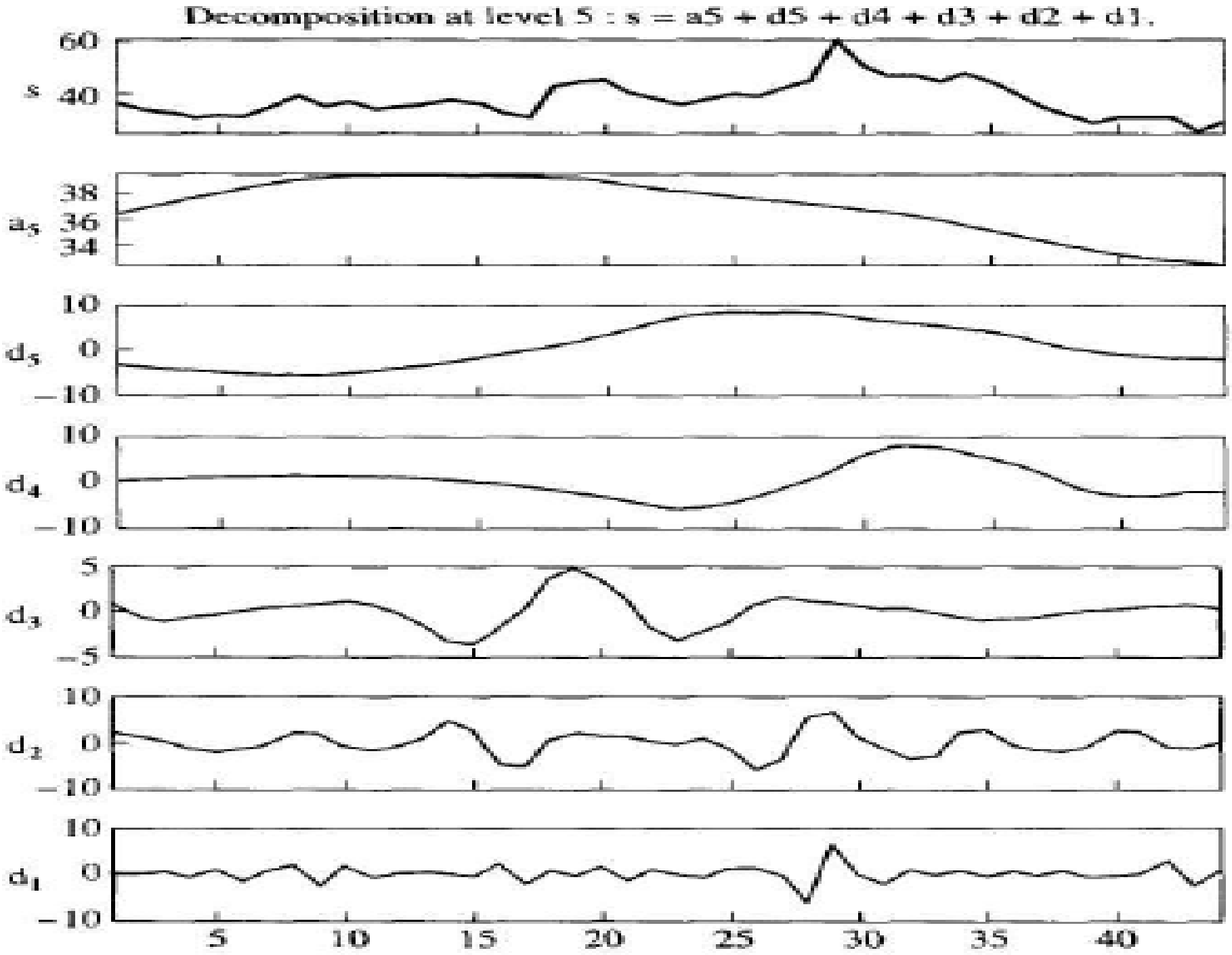
… и в пространстве

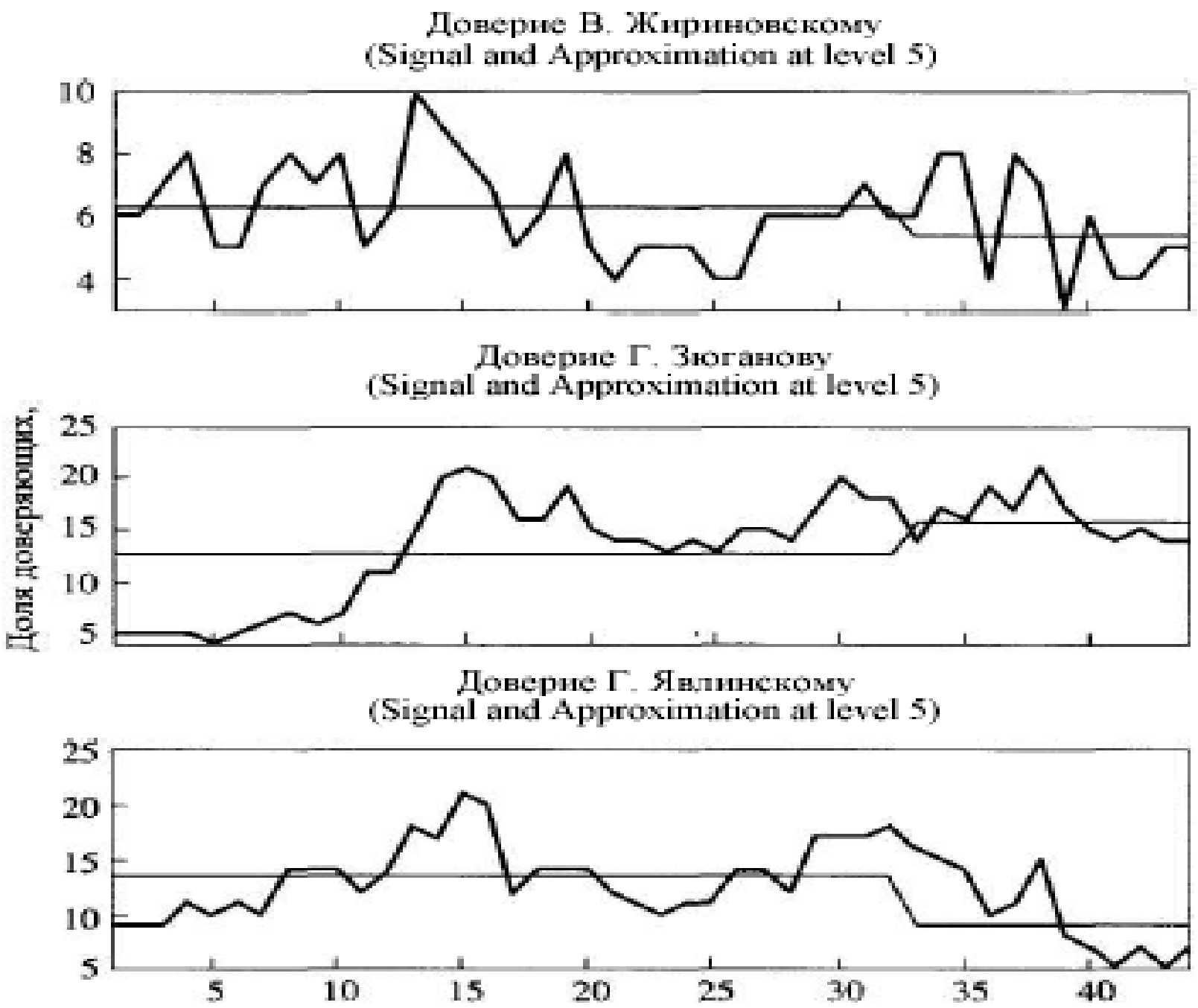


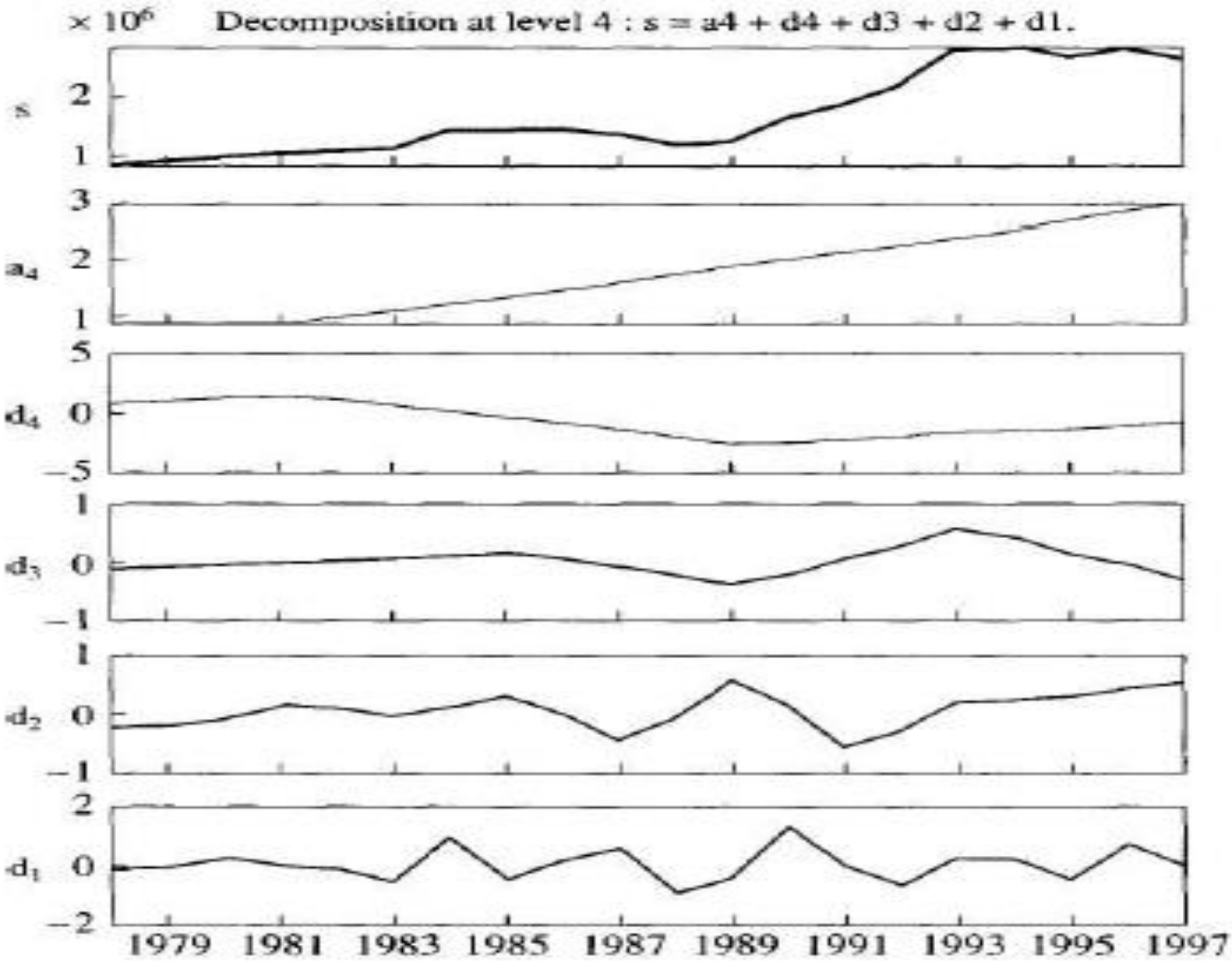
Декомпозиция динамики долей ответов "Терпеть наше бедственное положение уже невозможно" с использованием вейвлета Добеши






Decomposition at level 5 : s = a5 + d5 + d4 + d3 + d2 + d1.
s
60
40
a5
38
36
34
d5
10
0
−10
d4
10
0
−10
d3
5
0
−5
d2
10
0
−10
d1
10
0
−10
5
10
15
20
25
30
35
40


Доверие В. Жириновскому
(Signal and Approximation at level 5)
10
8
6
4
Доверие Г. Зюганову
(Signal and Approximation at level 5)
Доля доверяющих,
25
20
15
10
5
Доверие Г. Явлинскому
(Signal and Approximation at level 5)
25
20
15
10
5
5
10
15
20
25
30
35
40


× 10^6
Decomposition at level 4 : s = a4 + d4 + d3 + d2 + d1.
s
a4
d4
d3
d2
d1
1979
1981
1983
1985
1987
1989
1991
1993
1995
1997

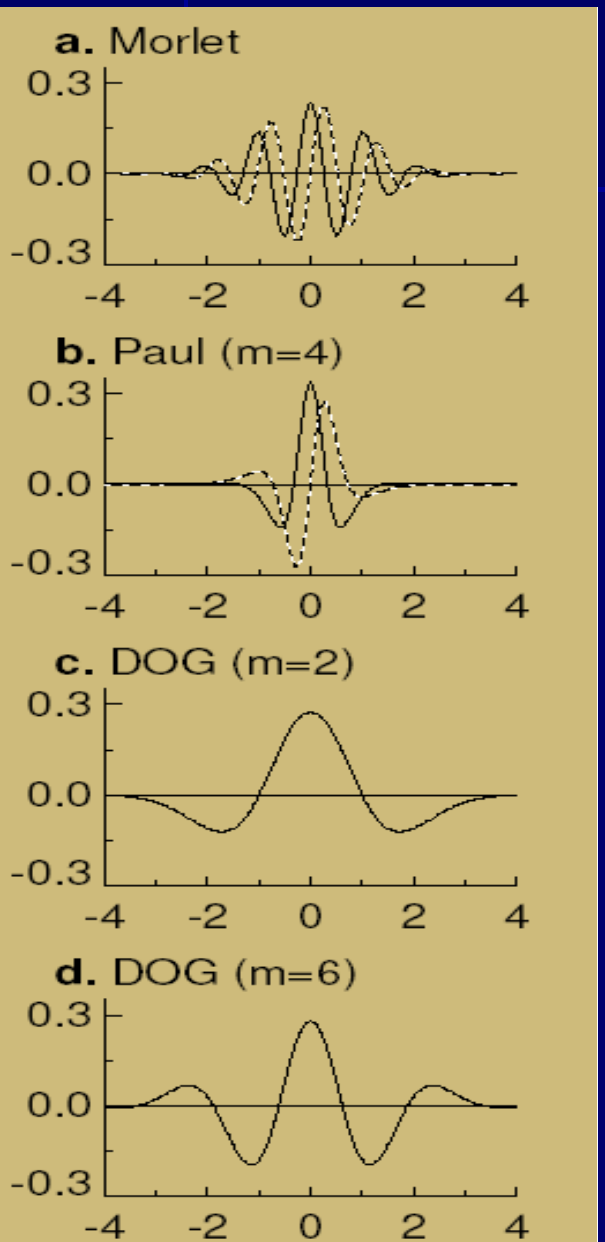
Вейвлет спектр

В вейвлет анализе рассматривается свертка сигнала с пространственно ограниченной волной, поэтому вейвлет спектр - двумерная величина, зависящая от двух координат (обычно временных величин): протяженности ограниченной волны и несущей частоты волны (ее периода). Поскольку частота строго определена только для монохромной волна (бесконечной протяженности), то говорят не о периоде несущей частоты, а о шкале, или эквивалентном Фурье-периоде.

$$C(a,b) = \int_R s(t)\frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt$$

$$a = 2^j, b = k2^j, (jk) \in Z^2$$

Базисные вейвлет функции

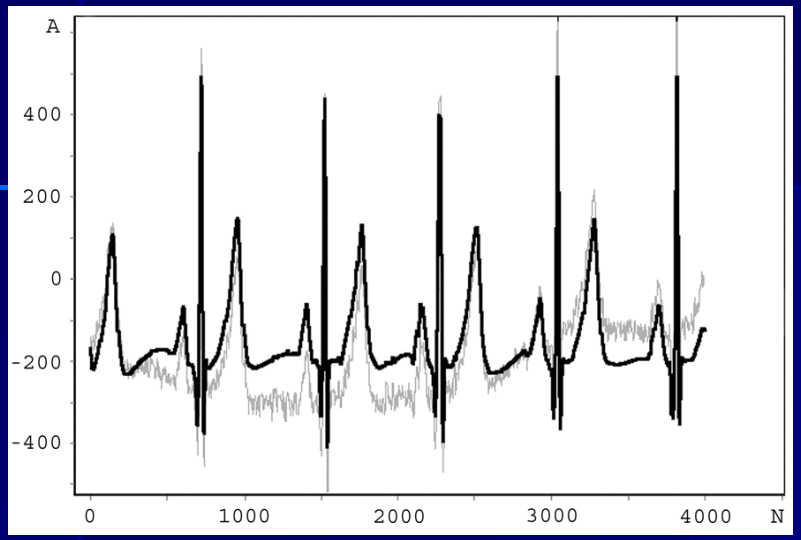


4 различных базисных вейвлета: Морли, Поля и производные гауссианы 2-го и 6-го порядка во временной области.

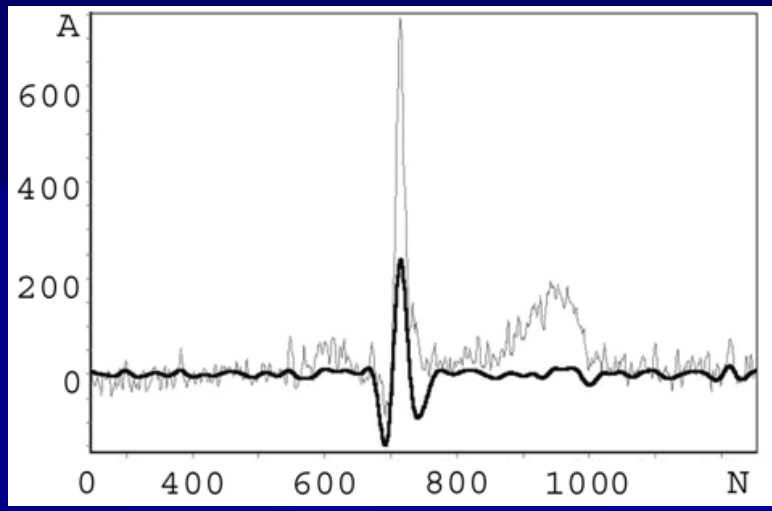
Эти функции имеют нулевое среднее и локализованы как во временной, так и в частотной области. Функции имеют действительную и мнимую части, или амплитуду и фазу. Они определяют вейвлет спектр мощности $|C(a,b)|^2$.

Узкие функции дают хорошее разрешение по времени, широкие – по частоте.

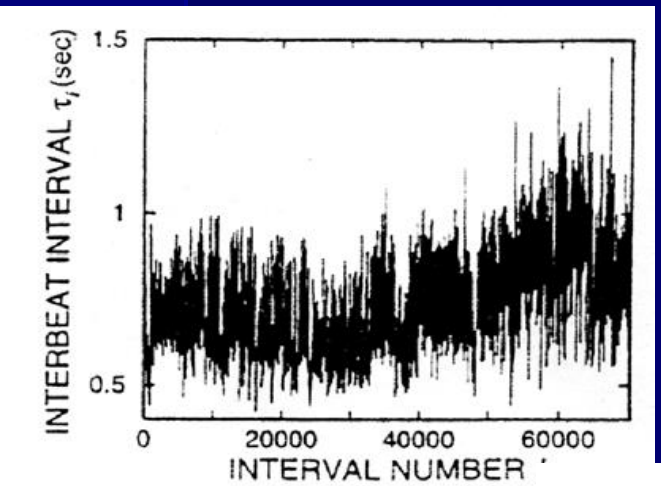
Применение вейвлет-анализа к обработке электрокардиографических данных



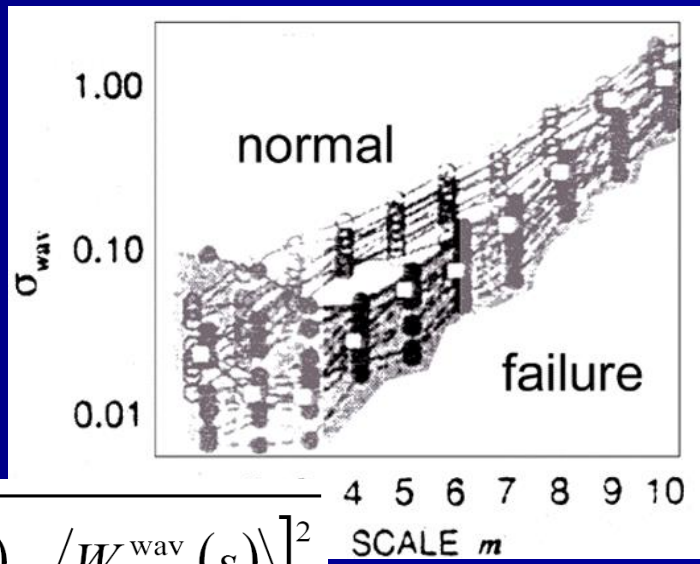
Шумоподавление и устранение подложки



Выделение значимых пиков



Среднеквадр. величина $\sigma_{wav}(m)$ на различных масштабах m не зависит от вида вейвлета, но отличается для здоровых и инфартников!



Интервалы сердечных сокращений

$$\sigma_{\mathrm{wav}}(m) = \sqrt{\frac{1}{1-N}\sum_{n=0}^{N-1}\left[W_{m,n}^{\mathrm{wav}}(s) - \left\langle W_{m,n}^{\mathrm{wav}}(s)\right\rangle\right]^2}$$

Спасибо за внимание