ЛЕКЦИЯ 7. Моделирование с помощью метода статистических испытаний Метод Монте-Карло

Цель лекции

Сформировать у обучающихся теоретические знания об основных принципах и методах статистического моделирования, изучить сущность метода Монте-Карло, алгоритмы его реализации и особенности применения для исследования стохастических систем. Ознакомить с методами оценки вероятностей случайных событий, вычисления математических характеристик на основе многократных испытаний, а также с принципами моделирования случайных блужданий. Развить навыки анализа точности и достоверности результатов имитационного моделирования.

План лекции

1. Понятие и сущность метода статистических испытаний (Монте-Карло).
2. Основные принципы и области применения метода Монте-Карло.
3. Обобщенный алгоритм моделирования по методу Монте-Карло.
4. Моделирование случайных событий и оценка их вероятностей.
5. Применение метода Монте-Карло для приближенного вычисления числа π.
6. Влияние количества испытаний и качества генераторов случайных чисел на точность результатов.
7. Моделирование последовательности случайных событий на примере вероятностной задачи.
8. Определение вероятностей различных исходов по результатам статистических испытаний.
9. Понятие и основные характеристики случайного блуждания.
10. Моделирование одномерного случайного блуждания.
11. Оценка математического ожидания и дисперсии случайного блуждания.
12. Проверка правильности имитационных моделей путем сравнения результатов статистического моделирования с аналитическими расчетами.

В процессе построения и реализации имитационных моделей стохастических систем широко используется метод статистических испытаний (Монте-Карло). Метод Монте-Карло - общее название группы численных методов, основанных на получении большого числа реализаций стохастического (случайного) процесса, который формируется таким образом, чтобы его вероятностные характеристики совпадали с аналогичными величинами решаемой задачи. Метод часто используется для решения задач в различных областях физики, химии, математики, экономики, оптимизации, теории управления и др.

Идея метода Монте-Карло заключается в следующем. Вместо того чтобы описывать исследуемый случайный процесс аналитически, составляется алгоритм, имитирующий этот процесс. В алгоритм включаются специальные процедуры для моделирования случайности. Конкретное осуществление алгоритма складывается каждый раз по-иному, со своими результатами. Обработав результаты множества реализаций алгоритма методами математической статистики, можно получить любые характеристики: вероятности событий, математические ожидания, дисперсии случайных величин. Вероятность того, что эти характеристики отличаются от истинных не более чем на заданную величину, является функцией количества испытаний.

Обобщенная схема алгоритма, реализующего метод Монте-Карло, представлена на рис.1. На первом этапе работы алгоритма выполняется инициализация статистических переменных. В данных переменных, например при оценке вероятности наступления некоторого события, будет накапливаться число экспериментов, в которых интересующее нас событие произошло. Затем организуется цикл, в теле которого выполняются отдельные реализации алгоритма (например, выполняется моделирование события) и обновляются статистические переменные (например, если событие произошло, то соответствующая

статистическая переменная увеличивается на 1). В последнем блоке алгоритма выполняется обработка результатов моделирования.



Рис.1. **Обобщенный алгоритм моделирования по методу Монте-Карло**

При этом, например, может оцениваться вероятность интересующего нас события.

Поясним сущность метода статистического моделирования следующими примерами.

Пример 1. Нахождение значения числа *к.*

Решение. На рис. 2 показан квадрат со стороной *г,* например, нарисованный на листе бумаги. Его площадь 5, $= г^2$. В квадрат вписана четверть круга радиуса *г* с площадью $S_2 = кг^2/4$. Отношение площадей четверти круга и квадрата равно $S_2/S_1 = к/4$.

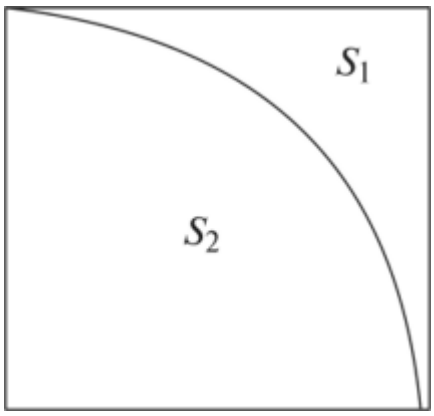

Рис.2. Иллюстрация для нахождения числа *к*

Это отношение, а следовательно число *к,* можно приближенно получить, проделав следующие статистические испытания. Будем бросать на лежащий на столе лист бумаги мелкие крупинки так, чтобы они равномерно рассыпались по поверхности листа случайным образом. Крупинки вне квадрата учитывать не будем. Подсчитаем *N* - число крупинок, попавших в квадрат, и *M* - число крупинок в пределах четверти круга. Поскольку крупинки имеют одинаковую вероятность попасть в любой участок рисунка, то отношение *M/N при* достаточно большом числе бросаний будет приближенно равным отношению площадей, т.е. *n/4.*

Можно немного изменить процесс нахождения числа *п.* Для этого проведем вдоль сторон квадрата координатные оси. Масштаб выберем таким, чтобы сторона квадрата равнялась единице. Вместо крупинок будем наносить на этот квадрат точки со случайными

координатами *(x, y)*. Под случайными координатами будем понимать числа с равномерным распределением в единичном отрезке. Вероятность того, что точка окажется внутри круга, равна отношению площадей *n/4*. Составим алгоритм для нахождения числа *n*. Одно испытание (одна реализация) состоит из проверки неравенства $x^2 + y^2 < 1$ для координат *x* и *y* на истинность (рис. 3).



Рис. 3. **Реализация проверки неравенства**

Повторим его *N* раз, тогда *M* - количество точек, для которых неравенство выполняется, и *M/N* - частота этого события, зная которую можно найти значение числа тс.

В табл. 1 представлены результаты расчетов числа *к,* полученные с помощью программы, реализующей описанный алгоритм, при различном числе точек *N*. Отметим, что с помощью метода Монте-Карло можно получить лишь приближенное значение числа л и чем больше экспериментов мы выполняем, тем меньше погрешность получаемых результатов. Дополнительно отметим, что на результаты моделирования существенное влияние оказывает качество генератора случайных чисел. Это определяется тем, что если точки будут размещаться в пределах квадрата неравномерно, то и результаты моделирования будут неправильными даже при большом числе экспериментов.

Таблица 1

Результаты экспериментов по определению значения числа *к*

Количество точек *(N)*	Значение *n*
100	3,2000
1 000	3,1120
10 000	3,1140
100 000	3,1374
1 000 000	3,1391
10 000 000	3,1409

Пример 2. Происходит дуэль между участниками *A* и *B.* Участник *A* стреляет первым с вероятностью $p = 0{,}9$. При стрельбе участник *A* попадает в *B* с вероятностью $p_A = 0{,}5$, а участник *B* - в *A* с вероятностью $p_в = 0{,}8$. Участники делают не более одного выстрела. Оценить вероятность победы участника *A, B* и вероятность ничьей.

Решение. Поскольку данная задача достаточно простая, то можно выполнить аналитический расчет требуемых вероятностей.

$$P(A) = p \cdot p_A + (1-p) \cdot (1-p_B) \cdot p_A = 0{,}46.$$
$$P(B) = p \cdot (1-p_A) \cdot p_B + (1-p) \cdot p_B = 0{,}44.$$
$$P(H) = (1-p_A) \cdot (1-p_B) = 0{,}1.$$

Эти результаты можно использовать для проверки правильности результатов моделирования.

При моделировании нам нужно много раз разыграть дуэль между участниками, моделируя отдельные события дуэли (выбор первого стреляющего, стрельба первого стреляющего, стрельба второго стреляющего) и определяя тип результата (победа участника *A,* участника *B* или ничья). После выполнения ряда экспериментов подсчитывается число событий каждого типа, и затем оцениваются вероятности соответствующих событий.

Обобщенная схема алгоритма решения задачи была представлена на рис. 1. На рис. 4 представлен алгоритм розыгрыша одного эксперимента (одной дуэли). В данном алгоритме используются три статистических счетчика *(N_A, N_B, N_H),* обнуляемых на этапе инициализации статистических переменных и используемых для подсчета числа побед участника *A,* участника *B* и числа ничьих.

В начале работы данного алгоритма необходимо смоделировать событие, заключающееся в выборе первого стреляющего. Алгоритм моделирования такого простого события был рассмотрен в разделе 0. В том случае, если первым стреляет участник *A,* моделируется его

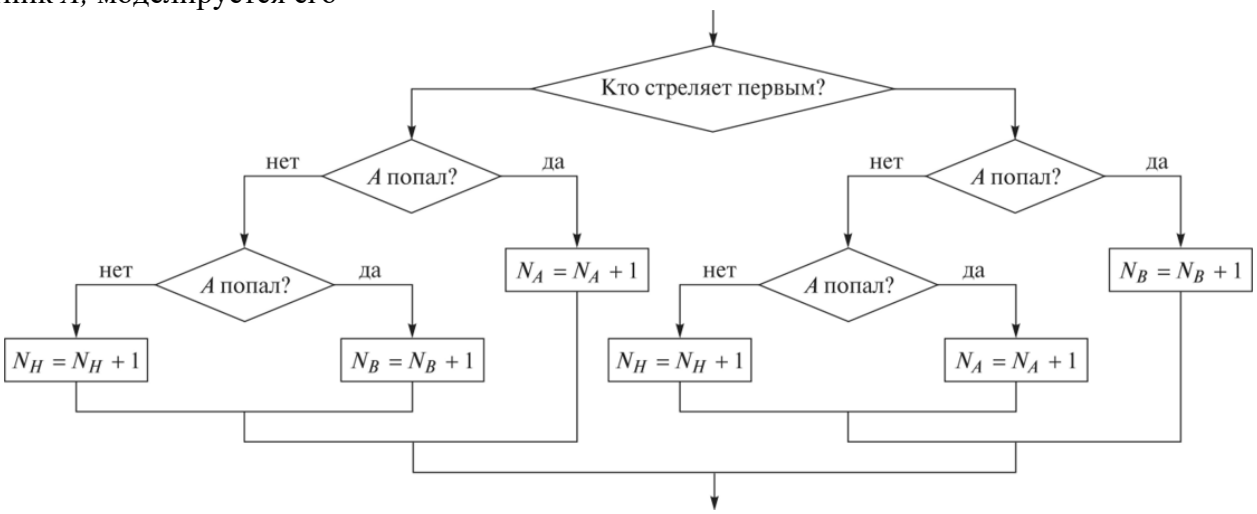

Рис. 4. Алгоритм розыгрыша одного эксперимента стрельба.

Для этого разыгрывается событие, исходом которого будет промах (с вероятностью 1 - p_A) или попадание (с вероятностью p_A) участника Л. Если он попал, то в разыгрываемой дуэли победил участник *Л* и мы увеличиваем на 1 число его побед. Если же игрок *Л* промахнулся, то необходимо смоделировать стрельбу игрока *B.* Если он попал, то увеличиваем число побед участника *B.* В противном случае произошла ничья, и мы увеличиваем на единицу счетчик N_H. Похожим образом развивается ситуация в том случае, если первым стреляет участник *B.*

После розыгрыша *N* дуэлей можно оценить вероятность искомых событий с помощью следующих выражений:

$$P(A) = N_A / N,$$

$$P(B) = N_B / N,$$

$$P(H) = N_H / N.$$

Выполним моделирование рассматриваемой системы вручную. Полученные результаты по 20 экспериментам (дуэлям), случайные числа для которых формировались с помощью функции СЛЧИС() MS Excel, представлены в табл. 2.

Таблица 2

Пример моделирования методом Монте-Карло

№ эксперимента.	Случайное число	Кто стреляет первым	Случайное число	Результат	Случайное число	Результат	Кто победил
1	0,3216	*A*	0,3401	Попал			*A*
2	0,1922	*A*	0,3069	Попал			*A*
3	0,6360	*A*	0,5904	Промах	0,7010	Попал	*B*
4	0,6234	*A*	0,7095	Промах	0,9393	Промах	Ничья
5	0,0983	*A*	0,5505	Промах	0,7170	Попал	*B*
6	0,1811	*A*	0,6871	Промах	0,0626	Попал	*B*
7	0,0562	*A*	0,6631	Промах	0,6491	Попал	*B*
8	0,3536	*A*	0,4897	Попал			*A*
9	0,4534	*A*	0,0713	Попал			*A*
10	0,4586	*A*	0,5352	Промах	0,0795	Попал	*B*
11	0,2774	*A*	0,2644	Попал			*A*
12	0,0836	*A*	0,6348	Промах	0,8685	Промах	Ничья
13	0,8119	*A*	0,5507	Промах	0,3903	Попал	*B*
14	0,1563	*A*	0,4240	Попал			*A*
15	0,1373	*A*	0,6166	Промах	0,0428	Попал	*B*
16	0,5001	*A*	0,0578	Попал			*A*
17	0,9247	*B*	0,8491	Промах	0,4729	Попал	*B*
18	0,4176	*A*	0,7501	Промах	0,9962	Промах	Ничья
19	0,5981	*A*	0,7187	Промах	0,0926	Попал	*B*
20	0,4908	*A*	0,5251	Промах	0,6681	Попал	*B*

Для оценки вероятности победы *A* считаем, сколько раз он победил (в данном случае 7), и делим полученную сумму на общее число экспериментов (20). В результате получаем, что оценка вероятности победы участника/4 равна 0,35. Похожим образом можно оценить вероятность победы участника *B* (получаем 0,50) и вероятность ничьей (получаем 0,15). Данные оценки похожи на точные значения вероятностей, однако погрешность полученных результатов из-за небольшого объема эксперимента очень высока. Для уменьшения погрешности моделирования следует увеличить объем эксперимента.

Одномерное случайное блуждание

Далее рассмотрим задачи о случайных блужданиях, которые часто возникают при исследовании различных процессов в физике, биологии, химии, экономике и многих других науках. Подобные задачи можно решать с помощью метода статистических испытаний.

Наиболее простой является одномерная задача по движению пьяного пешехода, который начинает движение от фонарного столба, расположенного в точке x = 0 (рис. 5).

Все шаги, совершаемые пешеходом, имеют одинаковую длину /. Направление каждого шага пешехода не зависит от направления предыдущего. Пешеход делает шаг вправо с вероятностью p и шаг влево с вероятностью $q = 1 - p$. В данной задаче необходимо определить вероятность того, что после M шагов пешеход окажется на расстоянии x от фонарного столба или среднее удаление пешехода от начальной точки после M шагов.

Исследование задачи одномерного случайного блуждания можно провести аналитически, воспользовавшись теорией вероятности.

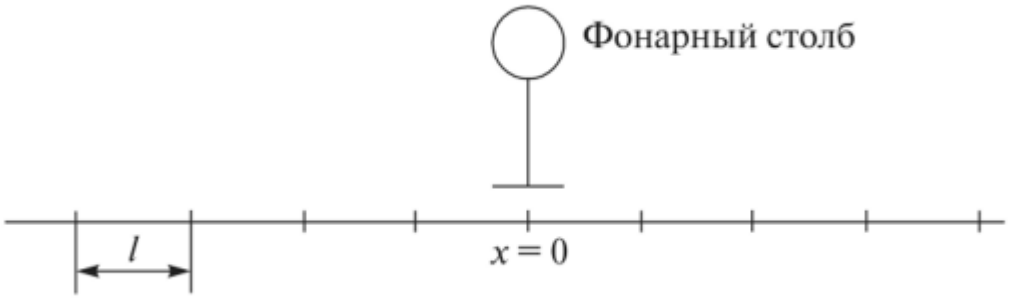

Рис. 5. **Иллюстрация для задачи по движению пьяного пешехода**

Полученные при этом результаты могут быть использованы в процессе отладки имитационной модели и проверки ее правильности. Среднее удаление р и дисперсию $<5^2x$ можно рассчитать с помощью следующих аналитических выражений:

$$\mu = (p - q)Ml;$$

$$\sigma_x^2 = 4pqMl^2.$$

Заключение

Метод статистических испытаний (Монте-Карло) является одним из наиболее эффективных инструментов имитационного моделирования стохастических систем, позволяющим исследовать сложные процессы и явления, поведение которых определяется воздействием случайных факторов. Основу метода составляет многократное проведение случайных испытаний с последующей статистической обработкой полученных результатов.

Применение метода Монте-Карло позволяет оценивать вероятности наступления событий, определять математические ожидания и дисперсии случайных величин, а также получать приближенные решения задач, для которых аналитические методы являются сложными или трудоемкими. Рассмотренные примеры вычисления числа π, моделирования вероятностных событий и одномерного случайного блуждания демонстрируют практические возможности данного метода.

Важнейшими условиями получения достоверных результатов являются правильная организация вычислительного эксперимента, использование качественных генераторов случайных чисел и выбор достаточного количества статистических испытаний. Увеличение числа независимых реализаций, как правило, способствует повышению точности получаемых оценок и уменьшению случайной погрешности моделирования.

Особое значение имеет сопоставление результатов статистического моделирования с аналитическими расчетами, позволяющее проверить корректность разработанных алгоритмов и оценить адекватность имитационной модели.

Таким образом, освоение метода Монте-Карло формирует теоретическую и практическую основу для дальнейшего изучения имитационного моделирования, анализа вероятностных процессов и применения компьютерных методов при исследовании сложных технических, экономических и информационных систем.

Контрольные вопросы

1. Что понимается под методом статистических испытаний?

2. В чем заключается сущность метода Монте-Карло?
3. В каких областях науки и техники применяется метод Монте-Карло?
4. Каковы основные преимущества метода Монте-Карло при исследовании стохастических систем?
5. Чем статистическое моделирование отличается от аналитического решения задачи?
6. Какие основные этапы включает обобщенный алгоритм метода Монте-Карло?
7. Для чего в алгоритме Монте-Карло используются статистические переменные?
8. Как осуществляется моделирование случайных событий с заданными вероятностями?
9. Каким образом по результатам многократных испытаний оценивается вероятность наступления события?
10. Как с помощью метода Монте-Карло можно получить приближенное значение числа π?
11. Какое геометрическое соотношение используется при вычислении числа π методом Монте-Карло?
12. Как определяется принадлежность случайной точки области четверти круга?
13. Как количество статистических испытаний влияет на точность получаемых результатов?
14. Почему качество генератора случайных чисел имеет важное значение для метода Монте-Карло?
15. В чем заключается принцип моделирования последовательности зависимых случайных событий?
16. Как организуется моделирование вероятностной задачи с несколькими возможными исходами?
17. Для чего используются счетчики исходов при проведении статистических испытаний?
18. Как определяются вероятности отдельных исходов по результатам многократных прогонов модели?
19. Почему результаты моделирования могут отличаться от аналитически полученных вероятностей?
20. Каким образом аналитические расчеты используются для проверки правильности имитационной модели?

Список литературы

1. Rubinstein R. Y., Kroese D. P. Simulation and the Monte Carlo Method. - 3rd ed. - John Wiley & Sons, 2016. - 432 p.
2. Robert C. P., Casella G. Monte Carlo Statistical Methods. - 2nd ed. - New York: Springer, 2004. - DOI: 10.1007/978-1-4757-4145-2.
3. Metropolis N., Ulam S. The Monte Carlo Method // Journal of the American Statistical Association. - 1949. - Vol. 44, No. 247. - P. 335–341. - DOI: 10.1080/01621459.1949.10483310.