Лекция 7

Моделирование с помощью метода статистических испытаний. Метод Монте-Карло

Автор Джомартова Ш.А.

Общие сведения о статистическом моделировании

Основным отличием статистических методов является построение генеральной совокупности:

последовательность вариантов исходных данных, поступающих на вход системы, определяется не самим исследователем в зависимости от плана эксперимента, а генерируются с помощью датчика случайных чисел на компьютере.

Далее реакция проверяется не на реальном объекте исследований, а на модели.

Таким образом, основное место при использовании статистических методов занимает компьютер.

В качестве моделей, на которых проверяется возможная реакция системы, применяются:

- ***вероятностные аналитические модели***

  (влияние случайных факторов учитывается с помощью задания вероятностных характеристик случайных процессов. Это приводит к усложнению вычислительной задачи и ограничивает применение данных моделей сравнительно простыми системами);

- ***имитационные модели***

  (введение случайных возмущений не вносит принципиальных усложнений, что делает их наиболее часто применяемыми).

Исследование сложных процессов и систем, подверженных случайным возмущениям, с помощью имитационного моделирования принято называть ***статистическим моделированием***.

Статистическая модель случайного процесса - это алгоритм, с помощью которого имитируют работу сложной системы, подверженной случайным возмущениям, причем полагается, что взаимодействие элементов системы носит вероятностный характер.

Этапы методики статистического моделирования:

1. Моделирование на компьютере псевдослучайных последовательностей с заданной корреляцией и законом распределения вероятностей (метод Монте-Карло), имитирующих случайные значения параметров при каждом испытании.
2. Преобразование полученных числовых последовательностей на имитационных математических моделях в генеральную совокупность.
3. Статистическая обработка результатов моделирования.

Численный метод, моделирующий случайные величины, равномерно распределенные на интервале (0,1), получил название "***метод статистических испытаний***" или "***метод Монте-Карло***".

Задачу ***моделирования случайных чисел*** с нормальным законом распределения решают в несколько ***этапов***:

1. Вначале имитируют равномерное распределение и получают последовательность псевдослучайных чисел, равномерно распределенных на интервале (0,1).
2. Затем, используя равномерно распределенную псевдослучайную величину, получают последовательность псевдослучайных чисел с нормальным законом распределения

Определение метода Монте-Карло

Метод Монте-Карло, или метод стохастического моделирования, основан на моделировании случайных процессов с заданными характеристиками.

История возникновения метода Монте-Карло

- Метод Монте-Карло вырос из попыток людей улучшить свои шансы в азартных играх.
- Название этой группе методов дал город Монте-Карло – столица европейского игорного бизнеса (казино), где играют в рулетку – одно из простейших устройств для получения случайных чисел, на использовании которых основан этот метод.





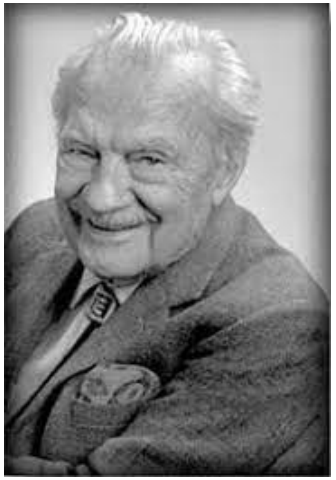
Создателями метода считают американских математиков Д. Неймана, С. Улама и Н.Метрополиса. В 1944 году, в связи с работами по созданию атомной бомбы Нейман предложил широко использовать аппарат теории вероятностей для решения прикладных задач с помощью ЭВМ. Первая работа, где этот вопрос систематически излагался, принадлежит Н.Метрополису и С.Уламу.



Д.Нейман



С.Улам



Н. Метрополис

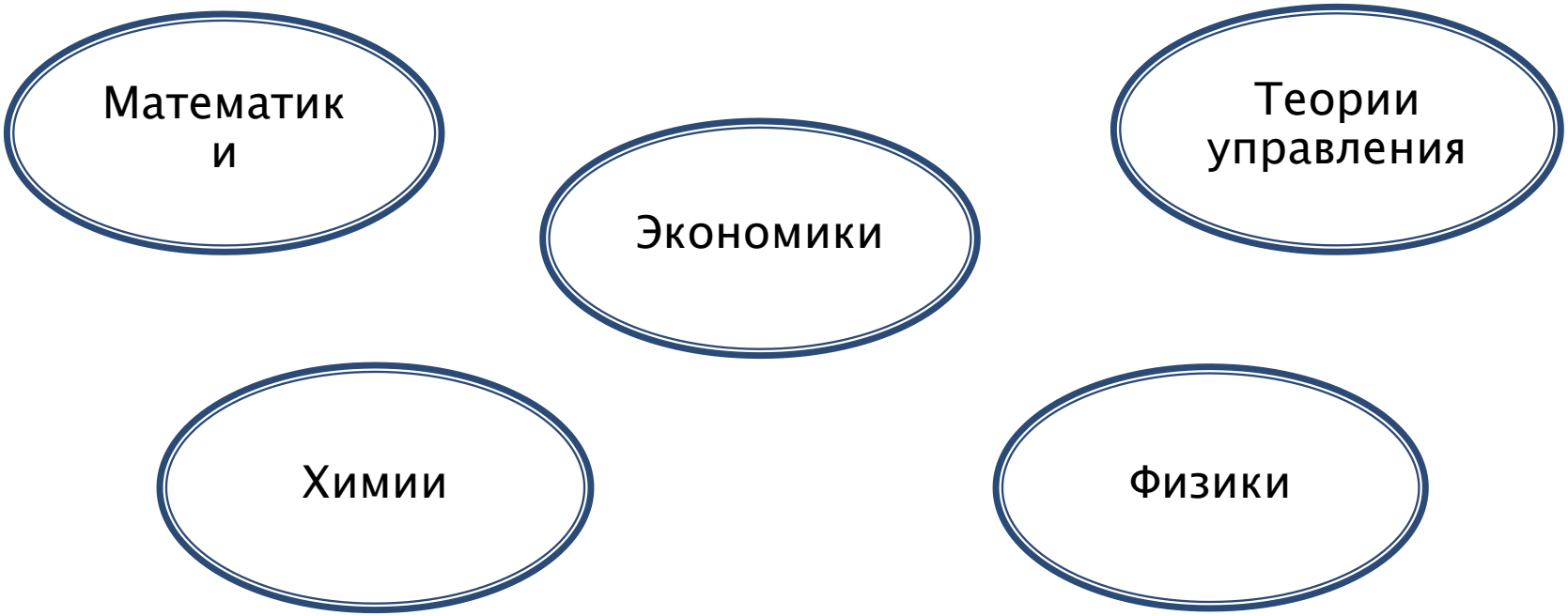
Суть метода Монте-Карло

Процесс моделируется при помощи генератора случайных величин. Это повторяется много раз, а потом на основе полученных случайных данных вычисляются вероятностные характеристики решаемой задачи.

- Например, чтобы узнать, какое в среднем будет расстояние между двумя случайными точками в круге, методом Монте-Карло, нужно взять много случайных пар точек, для каждой пары найти расстояние, а потом усреднить.

Область применения метода Монте-Карло

Используется для решения задач в различных областях:



Достоинства метода Монте-Карло

1. Высокая точность расчетов;
2. Высокая точность применительно к инструментам с нелинейными характеристиками;
3. Возможность моделирования любых исторических и гипотетических распределений.

Недостатки метода Монте-Карло

Высокая сложность моделей и соответственно высокий риск неадекватности моделей

Высокие требования к вычислительной мощности и значительные затраты времени на проведение расчетов

Обобщенный алгоритм моделирования по методу Монте-Карло



ПРИМЕР 1

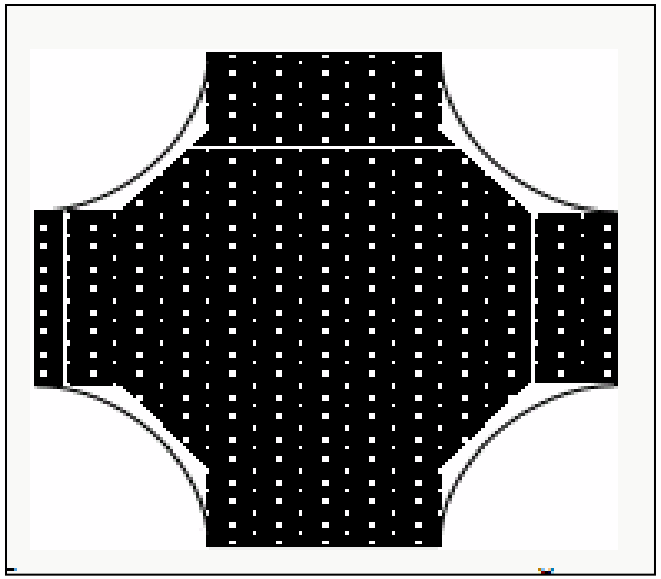


Рис. 1 Единичный квадрат

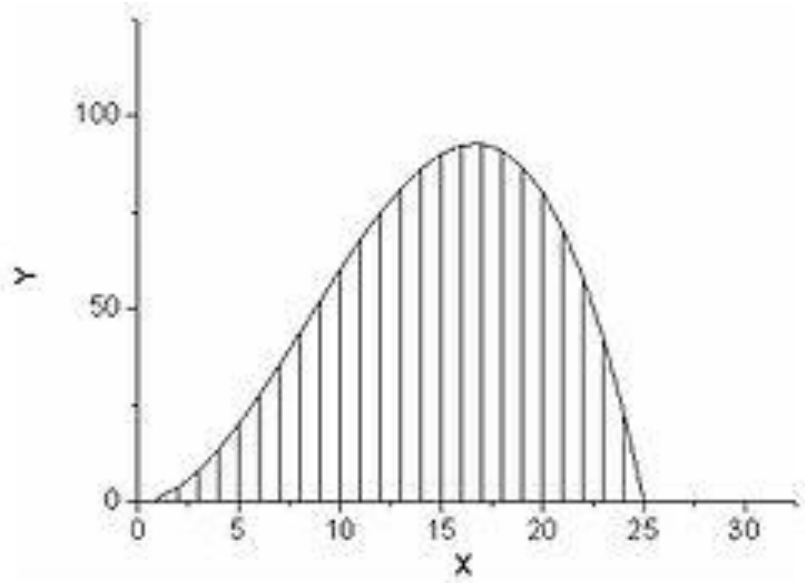
определить площадь плоской фигуры, расположенной внутри квадрата, сторона которого равна единице (рис. 1). Выберем внутри квадрата наугад N точек. Обозначим через M количество точек, попавших при этом внутрь фигуры. Тогда площадь фигуры приближенно равна отношению $\frac{M}{N}$. Отсюда, чем больше N, тем

ПРИМЕР 2

Интегрирование

Предположим, необходимо взять интеграл от некоторой функции. Воспользуемся неформальным геометрическим описанием интеграла и будем понимать его как площадь под графиком этой функции.

Для определения этой площади можно воспользоваться одним из обычных численных методов интегрирования: разбить отрезок на подотрезки, подсчитать площадь под графиком функции на каждом из них и сложить.

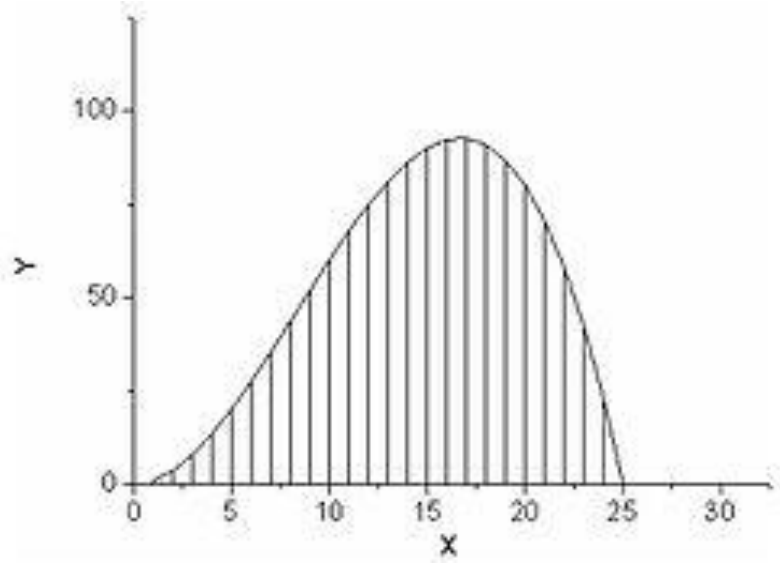


Численное интегрирование функции детерминистическим методом

Интегрирование

Предположим, что для функции, представленной на рисунке, достаточно разбиения на 25 отрезков и, следовательно, вычисления 25 значений функции. Представим теперь, мы имеем дело с *n*-мерной функцией. Тогда нам необходимо 25^n отрезков и столько же вычислений значения функции. При размерности функции больше 10 задача становится огромной.

Поскольку пространства большой размерности встречаются, в частности, в задачах теории струн, а также многих других физических задачах, где имеются системы со многими степенями свободы, необходимо иметь метод решения, вычислительная сложность которого бы не столь сильно зависела от размерности. Именно таким свойством обладает метод Монте-Карло.



Численное интегрирование функции детерминистическим методом

Обычный алгоритм Монте-Карло интегрирования

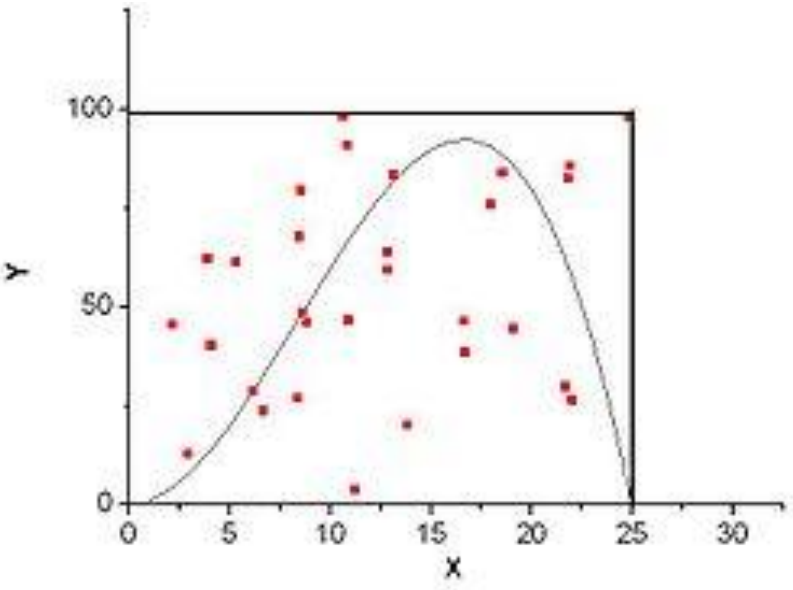
Для определения площади под графиком функции можно использовать следующий стохастический алгоритм:

-- ограничим функцию прямоугольником (*n*-мерным параллелепипедом в случае многих измерений), площадь которого *Spar* можно легко вычислить;

-- «набросаем» в этот прямоугольник (параллелепипед) некоторое количество точек (*N* штук), координаты которых будем выбирать случайным образом;

-- определим число точек (*K* штук), которые попадут под график функции;

-- площадь области, ограниченной функцией и осями координат, *S* даётся следующим выражением



Численное интегрирование функции методом Монте-Карло

$$S = S_{par}\frac{K}{N}$$

Пример 3 Моделирование рисков методом Монте-Карло

- **Алгоритм действий**

1. Вычисляют интервал, в пределах которого могут менять свои значения входные переменные. Внутри данного интервала все переменные имеют случайные значения.
2. Строят прямое распределение вероятностей, значения которых попадают в заданный интервал.
3. Определяют коэффициент корреляции, связывающий зависимые друг от друга характеристики.
4. Производят расчет результирующих значений. Расчет должен быть произведен многократно, не менее двухсот раз.
5. Все полученные в ходе расчета значения принимаются как случайные величины. Им характерны следующие свойства: математическое ожидание, плотность вероятности, дисперсия и пр.
6. Вычисляют возможные превышения минимальных значений и пр.

- Вероятностные характеристики применяются для:
  - Принятия решений об инвестировании проекта.
  - Ранжирования проекта.
  - Обоснования объемов резервирующих и страховых фондов

Примеры

- моделирование прохождения потока нейтронов в среде, расчёт коэффициента размножения нейтронов в ядерном реакторе, расчёт защиты реактора
- вычисление числа «Пи»
- азартные игры
- определение вероятности наступления какого-либо события
- выбор оптимальной стратегии в задачах
- моделирование поведения сложных экологических и экономических систем
- построение различных геометрических объектов (лабиринтов, фракталов)

Заключение

- Метод Монте-Карло – мощный и универсальный инструмент для решения задач во многих областях знаний.
- В отличие от аналитических методов, ищущих решение в виде ряда по собственным функциям, метод Монте-Карло ищет решения в виде статистических сумм.
- С помощью метода Монте-Карло решаются многие сложные задачи, которые очень сложно или невозможно решить другими методами.

Спасибо за внимание