ДЕРЕКТЕРДІ ИНТЕЛЛЕКТУАЛДЫ ТАЛДАУ

Дәріс 12

Сенімділік аралықтары

Оспан Ә.Ғ., PhD, доцент-зерттеуші

ҚазҰУ, Жасанды интеллект және Big Data кафедрасы

2026-2027 оқу жылы

Дәрістің мақсаты мен мазмұны

Мақсат және оқу нәтижелері

- Параметрді, нүктелік бағаны және стандартты қатені ажырату
- z-, t- және bootstrap аралықтарын негіздеу
- Сенімділік деңгейін рәсімді қайталау арқылы түсіндіру

Дәріс мазмұны

1. **Параметр және баға**
2. **Аралықтардың қамтуы**
3. **Орташа мән**
4. **Үлес**
5. **Bootstrap және шектеулер**

Параметр тұрақты, баға таңдамаға тәуелді

Үлестірім параметрі

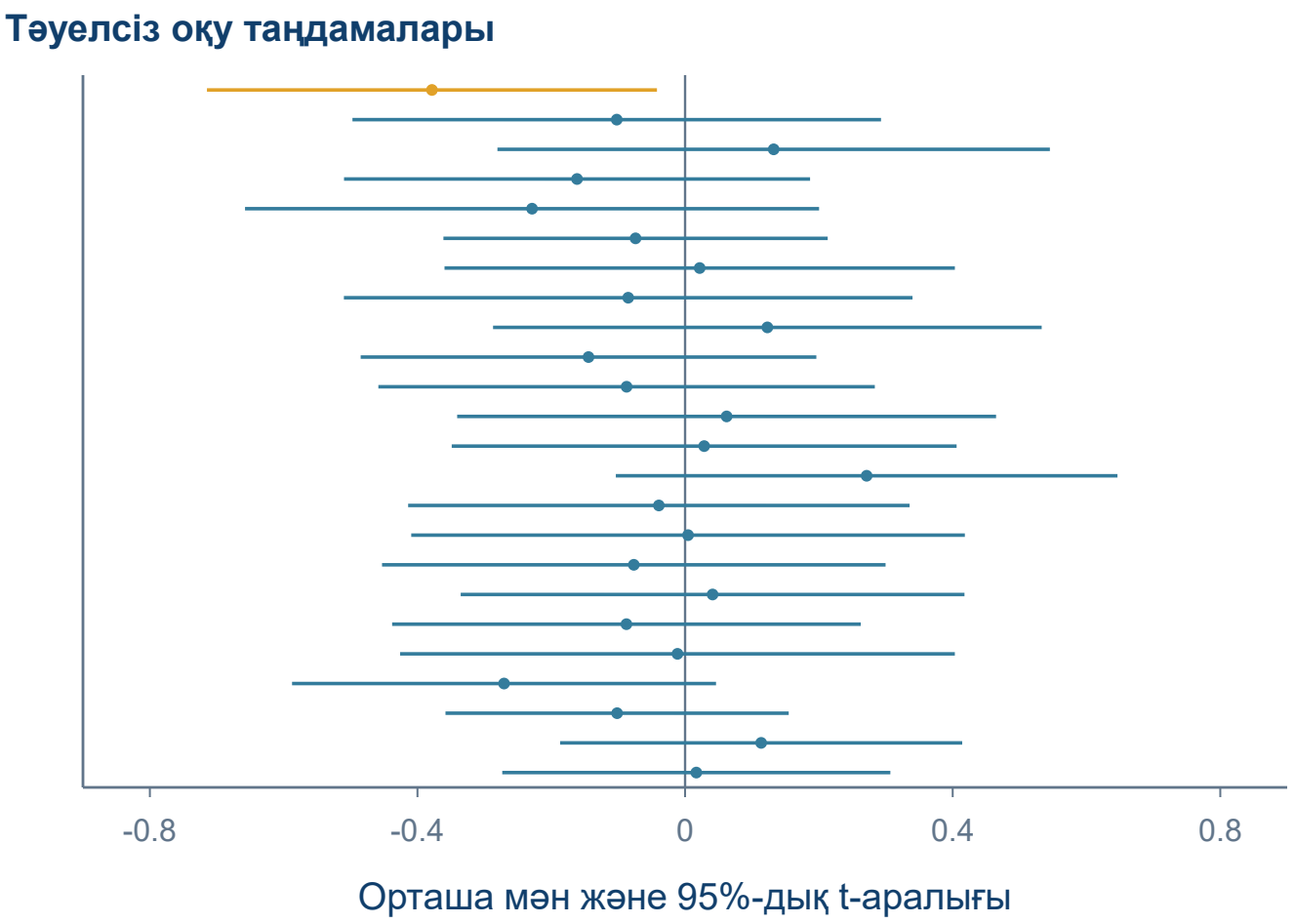
- Қабылданған модельде mu, sigma және p тұрақты.
- Әдетте белгісіз және мақсатты жиынтыққа қатысты.
- Мағынасы сұрақпен және іріктеу тәсілімен анықталады.

Таңдама статистикасы

- Орташа мән, s және p_hat бақылаулардан есептеледі.
- Қайта таңдама алғанда өзгереді.
- Нүктелік баға бүкіл белгісіздікті көрсетпейді.

Аралық ығысқан іріктеуді немесе қате шкаланы түзетпейді.

95% сенімділік деңгейі нені білдіреді?



Бүкіл рәсім қайталанады

- Әр жаңа таңдама жаңа L және U шекараларын береді.
- Модель орындалса, аралықтардың шамамен 95%-ы mu-ді қамтиды.
- Есептеуден кейін нақты аралық mu-ді не қамтиды, не қамтымайды.
- Бұл жеке бақылаулардың 95%-ына арналған аралық емес.

Сенімділік алғышарттары орындалғандағы рәсім қасиетіне қатысты.

Орташа мәннің стандартты қатесі

$$SE(X_bar) = sigma/sqrt(n)$$

Шашыраудың әртүрлі өлшемдері

- sigma — жеке мәндердің шашырауы.
- SE — қайталама таңдамалардағы орташа мәндер шашырауы.
- sigma белгісіз болса, s/sqrt(n) бағасы қолданылады.

Көлемнің әсері

- n 4 есе артқанда SE 2 есе азаяды.
- Бақылаулардың тәуелсіз әрі бірдей механизмі қажет.
- Үлкен n жүйелі ығысуды жоймайды.

sigma=10, n=100: SE=1; n=400 үшін: SE=0.5.

Z-аралығы: sigma шынымен белгілі

$$\bar{X} \pm z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Алғышарттар

- Тәуелсіз кездейсоқ таңдама.
- Орташаның қалыпты моделі: дәл немесе негізделген.
- sigma сыртқы сенімді ақпараттан белгілі.

Екі құйрық

- confidence=0.95 дегеніміз alpha=0.05.
- Критикалық квантиль: norm.ppf(0.975).
- Жарты ені критикалық мән мен SE көбейтіндісіне тең.

X_bar=50, sigma=10, n=100: аралық [48.04; 51.96].

Берілген шарттарда Z- және T-аралықтарын салыстыру

Python мысалы

```
import numpy as np
from scipy.stats import norm, t

z_half = norm.ppf(0.975) * 10 / np.sqrt(100)
t_half = t.ppf(0.975, df=15) * 8 / np.sqrt(16)
print(round(50-z_half, 2), round(50+z_half, 2))
print(round(50-t_half, 2), round(50+t_half, 2))
```

Нәтиже: Z: 48.04 51.96; T: 45.74 54.26

Белгілі sigma

- Қалыпты критикалық мән.
- n=100; sigma=10; орташа мән 50.

Белгісіз sigma

- 15 еркіндік дәрежесі бар t-квантиль.
- n=16; s=8; орташа мән 50.

sigma белгісіз болса, T неліктен пайда болады?

Тәуелсіз қалыпты таңдама

- (X_bar-mu)/(s/sqrt(n)) t-үлестіріміне ие.
- Еркіндік дәрежесі: n-1; s үшін ddof=1.
- Ауыр құйрықтар sigma бағалануын ескереді.

T нені түзетпейді?

- Іріктеудің жүйелі ығысуын.
- Тәуелді қайталама бақылауларды.
- Шағын таңдаманың күшті асимметриясын талдаусыз түзетпейді.

Үлкен n кезінде t мен z жақын, бірақ алғышарттар маңызды болып қалады.

Әдіс зерттеу дизайны анықталған соң таңдалады

Бағаланатын нысан	Негізі	Негізгі тексеру
Орташа мән, sigma белгілі	z * sigma/sqrt(n)	sigma осы таңдамадан тыс белгілі ме?
Орташа мән, sigma белгісіз	t * s/sqrt(n)	Дизайн және үлестірім пішіні
Үлес	Вальд немесе Уилсон	Сирек оқиғалар, тәуелсіздік
Күрделі статистика	Bootstrap квантильдері	Қайта іріктеудің дұрыс бірлігі

Әдіс белгісіз іріктеуді және бақылаулар тәуелділігін жоймайды.

Үлес аралығы: Вальд әдісінің қолайлылығы мен шегі

$$p_hat +/- z * sqrt(p_hat*(1-p_hat)/n)$$

Қарапайым Вальд аралығы

- p_hat=k/n; әр бақылау — тәуелсіз 0/1 нәтижесі.
- Сәтті және сәтсіз нәтижелер саны жеткілікті болуы керек.
- 0 мен 1 маңында қалыпты жуықтау сенімсіз.

Балама: Уилсон

- Орталық пен жарты енін түзетеді.
- Шекаралар [0;1] ауқымында қалады.
- Жауап бергендердің ерікті өзіндік іріктеуін түзетпейді.

Әдістің шектері мен іріктеу шектеулері — әртүрлі мәселелер.

100 нәтижедегі 60 сәтті нәтиже үшін Уилсон аралығы

Python мысалы

```
k, n = 60, 100
z = norm.ppf(0.975)
phat = k / n
d = 1 + z**2 / n
c = (phat + z**2 / (2*n)) / d
term = phat*(1-phat)/n + z**2/(4*n**2)
h = z * np.sqrt(term) / d
print(round(c-h, 3), round(c+h, 3))
```

Нәтиже: 0.502 0.691

Кіріс шарттары

- 100 тәуелсіз бақылауда 60 сәтті нәтиже.
- Екіжақты сенімділік деңгейі 95%.

Нәтижені оқу

- Аралық процестің үлесін бағалайды.
- Сенімділік деңгейі рәсімге қатысты.

Симуляция қамтудың мағынасын көрсетеді

1

Белгілі mu беру

Қалыпты модель: mu=50, sigma=10.

2

Іріктеуді қайталау

Бірдей көлемдегі көп тәуелсіз таңдама алу.

3

Аралықтар құру

Алдын ала таңдалған бір рәсімді қолдану.

4

Қамтуды санау

Әр қайталауда L<=50<=U шартын тексеру.

- Сенімділік деңгейі рәсімдер сериясына қатысты.
- Шекті симуляциядағы қамту үлесі дәл 0.95 болуға міндетті емес.

Bootstrap: бақыланған жиыннан қайта іріктеу

1

Бақыланған жиын

Статистиканы және тәуелсіз іріктеу бірлігін анықтау.

2

Қайтара отырып іріктеу

Көлем бастапқыдай; жолдар қайталануы мүмкін.

3

Қайта есептеу

Орташа мәнді не өзге таңдалған статистиканы сақтау.

4

Квантиль шекаралары

95% үшін 0.025 және 0.975 квантильдерін алу.

- Жолдар бойынша әдеттегі bootstrap тәуелсіздікті жорамалдайды.
- Шағын жиында белгісіз сирек нәтижелер жоқ.

Орташа жастың оқу bootstrap мысалы

Python мысалы

```
from pathlib import Path
import pandas as pd

football = pd.read_csv(Path('data') / 'football.csv')
age = football['Age'].to_numpy(dtype=float)
rng = np.random.default_rng(42)
means = np.empty(1000)
for i in range(means.size):
    sample = rng.choice(age, size=age.size, replace=True)
    means[i] = sample.mean()
print('Файлдың орташа мәні:', age.mean())
print(np.quantile(means, [0.025, 0.975]))
```

Код не істейді?

- Ойыншыларды қайтара отырып 1000 рет іріктеу.
- Шекаралар — орташалардың 0.025 және 0.975 квантильдері.

Қорытындыны шектеу

- Жолдар тәуелсіздігі — жорамал.
- Клубтық байланыстар мен белгісіз іріктеу ескерілмеген.

Файлдың орташа мәні белгілі; белгісіздік қабылданған модельге қатысты.

Сенімділік аралығы неге кепілдік бермейді?

Түсіндіру

- Шекаралар есептелгеннен кейінгі mu ықтималдығы емес.
- Бір қорытындының дұрыстық ықтималдығы емес.

Талдау бірлігі

- Жеке мәндердің 95%-ының ауқымы емес.
- Барлық болашақ бақылаулардың автоматты бағасы емес.

Деректер дизайны

- Ығысу мен тәуелділікті түзетпейді.
- Белгісіз бас жиынтықты анықтамайды.

Дәрістің негізгі нәтижелері

1. Параметр тұрақты; статистикалар мен шекаралар таңдамалар арасында өзгереді.
2. 95% сенімділік — қайталанатын қамту рәсімінің қасиеті.
3. Белгілі sigma z-ке, бағаланған s тиісті модельде t-ге әкеледі.
4. Вальд үлес аралығы сирек оқиғаларда сенімсіз.
5. Bootstrap қайта іріктеудің дұрыс бірлігі мен сызбасын талап етеді.

Түсінуді тексеру және өзіндік жұмыс

1. Деректер алынғанға дейін аралық құрғанда не кездейсоқ болады?
2. Орташаның аралығы неліктен өлшемдердің 95%-ының ауқымы емес?
3. Белгілі sigma мен таңдамалық s айырмасы қандай?
4. Вальд шекараларын қию неліктен қамтуды түзетпейді?
5. Бір клуб ойыншылары бойынша bootstrap-ты не шектейді?

Өзіндік жұмыс

n=36, X_bar=120 және белгілі sigma=18 кезінде 90%, 95% және 99% аралықтарды салыстырыңыз. Ені неліктен өзгеретінін түсіндіріңіз.

Құжаттама және бастапқы материалдар

Құжаттама

1. SciPy: Стьюдент үлестірімі

https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.stats.t.html

2. SciPy: bootstrap

https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.stats.bootstrap.html

3. NumPy: quantile

https://numpy.org/doc/stable/reference/generated/numpy.quantile.html

Дәрістің негізі

- Берілген 12-дәрістің Python арқылы сенімділік аралықтары жөніндегі презентациясы
- Берілген 12-зертханалық жұмыстың сенімділік аралықтары жөніндегі материалы
- Берілген 12-зертханалық жұмыстың жауаптары бар материалы