АЛГОРИТМЫ И СТРУКТУРЫ ДАННЫХ

ЛЕКЦИЯ 15

Линейное программирование

Сначала формулируют переменные, ограничения и цель, затем выбирают метод решения.

15

ИЗ 15 ЛЕКЦИЙ



МОДУЛЬ 3 Динамическое программирование

1 КУРС / 2 АКАДЕМИЧЕСКИХ ЧАСА / PYTHON 3

Цель и содержание лекции

ЦЕЛЬ И РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ

перевести задачу распределения ресурсов в линейную модель, найти оптимум через вершины допустимой области и проверить его верхней оценкой.

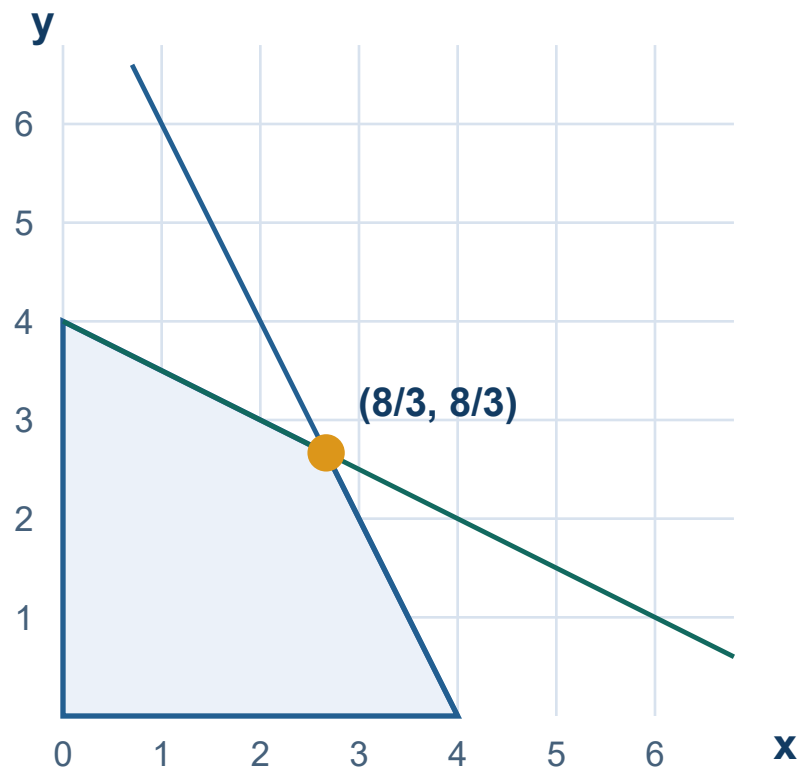
- Переводить ресурсную задачу в линейную модель.
- Строить допустимую область для двух переменных.
- Сравнивать непрерывную и целочисленную постановки.

ПЛАН ЛЕКЦИИ

1. **Переменные, целевая функция и ограничения**
2. **Допустимая область и поиск оптимума по вершинам**
3. **Перебор вершин в Python и проверка результата**
4. **Симплекс-метод, особые случаи и целочисленные решения**

Линии ограничений образуют допустимый многоугольник

СХЕМА



ОГРАНИЧЕНИЯ

$2x + y \leq 8$

$x + 2y \leq 8$

$x, y \geq 0$

ЦЕЛЬ: МАКСИМУМ 3x + 2y

Сравните значения в вершинах. Функция 3x + 2y достигает максимума 40/3 в точке (8/3, 8/3).

Как составить линейную модель

01 ТЕМА

Мастерская выпускает две жидкие смеси A и B. Пусть x и y — объемы смесей в литрах. На литр A расходуется два литра основы и один час работы, на литр B — один литр основы и два часа. В наличии восемь литров основы и восемь часов. Маржа на литр A составляет три условные единицы, на литр B — две. Требуется выбрать объемы, дающие наибольшую общую маржу.

Параметр	Смесь A, на литр	Смесь B, на литр	Всего доступно
Основа	2 л	1 л	8 л
Время работы	1 ч	2 ч	8 ч
Маржа	3 ед.	2 ед.	—

Как составить линейную модель

01 ПРОДОЛЖЕНИЕ

Переменные x и y могут принимать неотрицательные вещественные значения. Ограничение по основе имеет вид $2x + y \le 8$, а ограничение по времени — $x + 2y \le 8$. Целевая функция $F = 3x + 2y$ подлежит максимизации. Ограничения описывают выполнимость плана, а функция сравнивает выполнимые планы. Например, выпуск $x = 3$, $y = 2$ требует 8 литров основы и 7 часов. Его маржа равна 13.

Линейность означает, что удвоение выпуска удваивает расход и маржу, а вклады разных продуктов складываются. Числа при переменных считаются постоянными. Если после выпуска трех литров меняется цена следующего литра, понадобится уточнить модель. Произведения переменных, например $x \cdot y$, требуют других методов или преобразования при дополнительных условиях. Перед расчетом полезно сверить единицы. Коэффициент 2 в первом ограничении выражает литры основы на литр A, во втором ограничении коэффициент 2 выражает часы на литр B.

Допустимая область и вершины

02 ТЕМА

Каждое неравенство выделяет полуплоскость. Допустимая область — их пересечение с условиями $x \geq 0$ и $y \geq 0$. Чтобы выбрать сторону от границы $2x + y = 8$, подставим точку $(0, 0)$. Условие выполняется, поэтому подходит сторона с началом координат. Аналогично проверяется второе ограничение. Допустимая область выпуклая, потому что линейность ограничений сохраняет допустимость любой точки на отрезке между двумя допустимыми планами.

Вершины образуются на пересечениях граничных прямых. На оси x при $y = 0$ самое жесткое ограничение дает $x = 4$. На оси y при $x = 0$ аналогично получаем $y = 4$. Если оба ресурсных ограничения выполняются как равенства, вычитание одного уравнения из другого дает $x = y$, а подстановка — $x = y = 8/3$. Пересечение $2x + y = 8$ с осью y дает $(0, 8)$, но эта точка нарушает ограничение по времени, поэтому ее исключаем.

Допустимая область и вершины

02 ПРОДОЛЖЕНИЕ

Допустимая вершина	Маржа $3x + 2y$
$(0, 0)$	0
$(4, 0)$	12
$(8/3, 8/3)$	$40/3$
$(0, 4)$	8

Если непустая допустимая область представляет собой ограниченный многоугольник, линейная функция достигает максимума хотя бы в одной его вершине. Любую точку внутри можно представить как взвешенное среднее вершин с неотрицательными весами, сумма которых равна единице. Значение функции там будет тем же взвешенным средним значений в вершинах и потому не превысит их максимум. Если одинаковое максимальное значение достигается в двух соседних вершинах, весь отрезок между ними оптимален. В нашем примере единственный максимум равен $40/3$.

Проверка оптимума в Python

03 ТЕМА

Код перебирает пары границ, отбрасывает параллельные прямые и проверяет все неравенства для остальных пересечений. Строка `(a, b, c)` означает `a·x + b·y ≤ c`. Класс `Fraction` хранит рациональные числа точно. Поэтому проверка значения на границе не зависит от погрешности округления.

Проверка оптимума в Python

15_01.py / фрагмент 1 из 2

```
from fractions import Fraction
from itertools import combinations


def vertices(constraints):
    points = set()
    for (a, b, c), (d, e, f) in combinations(constraints, 2):
        determinant = a * e - b * d
        if determinant == 0:
            continue
        x = Fraction(c * e - b * f, determinant)
        y = Fraction(a * f - c * d, determinant)
        if all(p * x + q * y <= r for p, q, r in constraints):
            points.add((x, y))
    return points


def margin(point):
    x, y = point
    return 3 * x + 2 * y
```

Проверка оптимума в Python

15_01.py / фрагмент 2 из 2

```
constraints = [(2, 1, 8), (1, 2, 8), (-1, 0, 0), (0, -1, 0)]
points = vertices(constraints)
for x, y in sorted(points):
    print(f"({x}, {y}) -> {margin((x, y))}")

best = max(points, key=margin)
assert best == (Fraction(8, 3), Fraction(8, 3))
print("Максимум:", margin(best))
```

РЕЗУЛЬТАТ ЗАПУСКА

```
(0, 0) -> 0
(0, 4) -> 8
(8/3, 8/3) -> 40/3
(4, 0) -> 12
Максимум: 40/3
```

Проверка оптимума в Python

03 ПРОДОЛЖЕНИЕ

У результата есть независимая проверка. Умножим ограничение по основе на `4/3`, по времени — на `1/3` и сложим. Слева получится `3x + 2y`, справа — `40/3`. Множители неотрицательны, поэтому неравенства сохраняют направление. Полученное `3x + 2y ≤ 40/3` справедливо для всех допустимых точек. План `(8/3, 8/3)` достигает этой границы. Это пример двойственности. Ограничения исходной задачи дают верхнюю оценку, а совпадение оценки со значением допустимого плана подтверждает оптимальность.

Как решают задачи большего размера

Учебный перебор рассчитан на две переменные, целочисленные коэффициенты и непустую ограниченную область. При m неравенствах рассматривается $O(m^2)$ пар и выполняется до m проверок на пару. Это $O(m^3)$ арифметических операций без учета роста разрядности чисел. В больших размерностях число комбинаций границ быстро растет. Симплекс-метод переходит между базисными допустимыми решениями. Геометрически в невырожденном случае это переходы между соседними вершинами с улучшением цели, пока критерий остановки не подтвердит оптимум. В прикладных решателях используются также методы внутренней точки.

Перед интерпретацией результата проверяют статус решения. Если одновременно потребовать $x \ge 5$ и $2x + y \le 8$ при $y \ge 0$, допустимых планов не будет. Если оставить только $x \ge 0$, $y \ge 0$ и максимизировать $3x + 2y$, значение цели можно наращивать без верхней границы. В численном решателе полезно отдельно проверить расход ресурсов подстановкой с учетом допуска. Например, `scipy.optimize.linprog` минимизирует цель, поэтому для исходной максимизации передают коэффициенты `(-3, -2)`.

Как решают задачи большего размера

04 ПРОДОЛЖЕНИЕ

Если товар можно выпускать только целыми партиями, переменные должны быть целыми. Округление обеих координат вещественного оптимума до `3` нарушает оба ограничения. Округление вниз до `(2, 2)` дает допустимый план с маржой `10`, хотя план `(3, 2)` дает `13`. Верхняя граница `40/3` действует и для целых планов. Так как маржа у них целая, значение `13` уже оптимально среди целочисленных планов. Этот пример показывает, как непрерывная задача дает верхнюю оценку для дискретной.

Что нужно уметь после лекции

ИТОГИ

- Линейная модель связывает переменные решения, ресурсные ограничения и критерий оптимальности.
- В ограниченном допустимом многоугольнике хотя бы одна вершина достигает оптимума линейной цели.
- Результат проверяют подстановкой и, когда удается, независимой границей для цели.
- Целочисленные требования меняют множество допустимых планов и требуют отдельного учета.

> Сначала формулируют переменные, ограничения и цель, затем выбирают метод решения.

Проверьте понимание

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Чем допустимый план отличается от оптимального?
2. Почему пересечение двух граничных прямых нужно проверять по всем ограничениям?
3. При каком условии все точки на стороне многоугольника дают один максимум?
4. Как различить несовместную задачу и задачу с неограниченной целью?

Самостоятельная работа

ПРАКТИКА

1. Увеличьте запас времени до 10 часов. Найдите новые вершины и оптимальный план вручную и с помощью кода.
2. Замените цель на $F = 2x + y$, сохранив исходные ограничения. Опишите все оптимальные планы.
3. Добавьте условие $x \geq 1$, а затем потребуйте целочисленный выпуск. Сравните непрерывный и целочисленный максимумы.

Источники и документация

ЧТЕНИЕ

ОСНОВНОЕ ЧТЕНИЕ

А. Бхаргава. Грокаем алгоритмы

СПб.: Питер, 2017. Глава 11. «Линейное программирование». С. 272–273.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Bertsekas D. P. Nonlinear Programming. Appendix A, раздел о многогранниках.
https://web.mit.edu/dimitrib/www/NLP_Appendixes_Refs.pdf

SciPy. Документация `scipy.optimize.linprog`.
https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.optimize.linprog.html