4 -ДӘРІС

СИГНАЛ МЕН САЛМАҚТЫҢ ВЕКТОРЛЫҚ КЕҢІСТІГІ

Дәрістің мақсаты

Студенттерде жасанды нейрондық желілердің математикалық аппаратына негіз болатын сызықтық векторлық кеңістік аксиомалары, векторларға қолданылатын негізгі алгебралық амалдар, сондай-ақ сигналдар мен салмақ векторларының сызықтық тәуелділігі мен сызықтық тәуелсіздігі туралы терең теориялық білім қалыптастыру.

Оқу нәтижелері

Дәрісті меңгеру нәтижесінде студенттер:

- **Түсінеді:** Сызықтық (векторлық) кеңістіктің формальды анықтамасын, векторларды қосу және скалярға көбейту амалдарының аксиомаларын.
- **Ажырата алады:** Векторлар жүйесінің сызықтық тәуелділігі мен сызықтық тәуелсіздігін, сондай-ақ олардың нейрондық желілердегі кіріс сигналдары мен салмақ векторларын талдаудағы рөлін.
- **Қолдана алады:** Сызықтық комбинация теңдеуін ($a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots + a_n p_n = 0$) шешу арқылы берілген векторлар жиынтығының сызықтық тәуелсіздігін математикалық тұрғыда тексере алады.

СЫЗЫҚТЫ ВЕКТОРЛЫҚ КЕҢІСТІК

- L жиынтығын сызықтық немесе векторлық кеңістік деп атайды, егер санға қосу мен көбейту амалдары осы жиынның барлық элементтері (векторлары) үшін анықталса және ол рас болса:

1. L -ден x және y элементтерінің әрбір жұбы x пен y қосындысы деп аталатын L -ден x + y элементіне сәйкес келеді және:

x + y = y + x - қосу коммутативті;

x + (y + z) = (x + y) + z - қосу ассоциативті;

x + 0 = x - бірегей нөлдік элемент 0 бар (L -ден кез келген x үшін x + 0 = x);

x + (- x) = 0 - L әр x элементі үшін бірегей қарама -қарсы элемент −x (x + (−x) = 0 L -ден кез келген x үшін) бар.

2. Әрбір x және α жұптарына, онда α - сан, ал x - L элементіне, α · x элементі сәйкес келеді, α мен x көбейтіндісі деп аталады және:

α · (β · x) = (α · β) · x - ассоциативті түрде санға көбейту :;

1 x = x - L -ден кез келген x элементі үшін.

- 3. Санға қосу және көбейту амалдары келесі қатынаспен байланысты:

- α · (x + y) = α · x + α · y - элементтерді қосуға қатысты үлестірім бойынша санға көбейту;

- (α + β) x = α x + β x - сандардың қосылуына қатысты үлестірімді түрде векторға көбейту.

СЫЗЫҚТЫҚ ТӘУЕЛСІЗДІК

- Енді біз векторлық кеңістік деп нені білдіретінімізді анықтаған соң, біз векторлардың кейбір қасиеттерін анықтаймыз. Бірінші қасиеттер - сызықтық тәуелділік және сызықтық тәуелсіздік.

Егер n скаляр коэфициенттер болса, олардың кем дегенде біреуі нөлге тең емес болса, онда

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = 0, \qquad (1)$$

берілген векторлар сызықты тәуелді.

Егер (1) барлық $a_i=0$, болған кезде ғана орындалса, онда берілген векторлар сызықты тәуелсіз.

МЫСАЛ

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ -a_1 + a_2 \\ -a_1 + (-a_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

бірақ бұл орындалады, егер $a_1=a_2=0$. Сондықтан p_1 және p_2 сызықтық тәуелсіз.

$$\chi_1 = 1 + t + t^2, \ \chi_2 = 2 + 2t + t^2, \ \chi_3 = 1 + t.$$

$$a_1\chi_1 + a_2\chi_2 + a_3\chi_3 = 0.$$

бірақ бұл орындалады, егер $a_1=a_2=1$, $a_2=-1$. Сондықтан p_1 және p_2 сызықтық тәуелді.

Қорытынды

Бұл дәрісте нейрондық желілер теориясының іргелі математикалық аппараты — сызықтық векторлық кеңістік ұғымы мен оның негізгі аксиомалары қарастырылды. Кіріс сигналдары мен салмақ коэффициенттерін векторлар ретінде сипаттау көпөлшемді деректермен жұмыс істеуді жүйелейді.

Векторлардың сызықтық тәуелділігі мен сызықтық тәуелсіздігін ажырата білу нейрондық желілерді жобалау мен оқытуда маңызды рөл атқарады: сызықтық тәуелсіз кіріс векторлары (мысалы, Хебб ережесін немесе псевдоинверсия әдісін қолданғанда) желіге барлық эталондық үлгілерді қатесіз есте сақтауға және ажыратуға мүмкіндік береді, ал сызықтық тәуелді деректер артық ақпараттың бар екенін көрсетеді.

Өзін-өзі бағалау сұрақтары

1. **Векторлық кеңістік:** Сызықтық (векторлық) кеңістік дегеніміз не? Векторларды қосу және скалярға көбейту амалдарына қойылатын негізгі аксиомаларды атаңыз.

---

2. **Нөлдік және қарама-қарсы элементтер:** Векторлық кеңістіктегі нөлдік элемент (0) пен қарама-қарсы элементтің ($-x$) анықтамасын беріңіз.

3. **Сызықтық комбинация:** Векторлар жүйесінің сызықтық комбинациясы дегеніміз не? Қандай жағдайда векторлар жиынтығы *сызықтық тәуелді* деп аталады?

4. **Сызықтық тәуелсіздік:** Векторлардың *сызықтық тәуелсіздігінің* формальды математикалық шартын жазыңыз. Екі вектор жазықтықта қай кезде сызықтық тәуелді болады (геометриялық мағынасы)?

5. **Практикалық тексеру:** Егер $p_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ және $p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ берілсе, бұл векторлар сызықтық тәуелді ме әлде сызықтық тәуелсіз бе? Жауабыңызды a_1, a_2 коэффициенттерін табу арқылы дәлелдеңіз.

6. **Нейрондық желілердегі маңызы:** Неліктен нейрондық желілерді оқыту кезінде кіріс сигналдары векторларының сызықтық тәуелсіз болуы маңызды?

Әдебиеттер тізімі

1. **Хейган М. Т., Демут Х. Б., Бил М. Х., Де Хесус О.** Нейронные сети. Дизайн и применение (Neural Network Design). — М.: ДМК Пресс, 2021. — 800 с. *(5-тарау: «Векторные пространства сигналов и весов» — сызықтық кеңістік аксиомалары және сызықтық тәуелсіздік).*

2. **Стренг Г.** Линейная алгебра и ее применения. — М.: Мир, 2015. — 454 с. *(Векторлық кеңістіктер, базис, сызықтық тәуелділік және ортогональдық негіздері).*

3. **Хайкин С.** Нейронные сети: полный курс. — 2-е изд. — М.: Издательский дом «Вильямс», 2018. — 1104 с. *(Нейрондық желілердің математикалық негіздері және векторлық есептеулер).*

4. **Гудфеллоу Я., Бенджио И., Курвилль А.** Глубокое обучение. — М.: ДМК Пресс, 2018. — 652 с. *(2-тарау: «Линейная алгебра» — скалярлар, векторлар, матрицалар және сызықтық тәуелсіздік).*

5. **Қазанғапов А. С., Тілеубердиев С. Т.** Сызықтық алгебра және аналитикалық геометрия: Оқу құралы. — Алматы: Қазақ университеті, 2019. — 260 б. *(Қазақ тіліндегі векторлық кеңістіктер мен сызықтық тәуелсіздік теориясы).*