5 -Дәріс

Нейрондық желілердің сызықтық түрлендірулері.

Дәріс мақсаты:

- Алдыңғы дәрістерде көргеніміздей, кіріс векторын салмақ матрицасына көбейту нейрондық желілер орындайтын негізгі операциялардың бірі болып табылады. Бұл операция сызықтық түрлендірудің мысалы болып табылады. Біз жалпы сызықтық түрлендірулерді зерттеп, олардың негізгі сипаттамаларын анықтағымыз келеді. Осы тарауда қарастырылатын меншікті мәндер, меншікті векторлар және негіздің өзгеруі сияқты ұғымдар өнімділікті үйрену (соның ішінде Уидроу-Хофф ережесі және кері таралу) және Хопфилд желісінің конвергенциясы сияқты нейрондық желінің негізгі тақырыптарын түсіну үшін маңызды болады.

Оқу нәтижелері. Дәрісті меңгеру нәтижесінде студенттер:

- **Түсінеді:** Сызықтық түрлендірудің формальды анықтамасын (аддитивтілік және біртектілік қасиеттері) және оның нейрондық желілердегі салмақ матрицасымен байланысын.
- **Қолдана алады:** Сызықтық түрлендірулерді матрицалық түрде жазуды, базисті ауыстыру формулаларын, сондай-ақ квадрат матрицаның меншікті мәндері (λ) мен меншікті векторларын (v) есептеу әдістерін.
- **Талдай алады:** Матрицаны диагональдау және меншікті мәндерді талдау арқылы рекуррентік желілердің (мысалы, Хопфилд желісінің) тұрақтылық күйіне жинақталуын немесе тербелуін болжай алады.

Хопфилд желісі

$$\mathbf{a}(t+1) = satlin(\mathbf{W}\mathbf{a}(t) + \mathbf{b}).$$

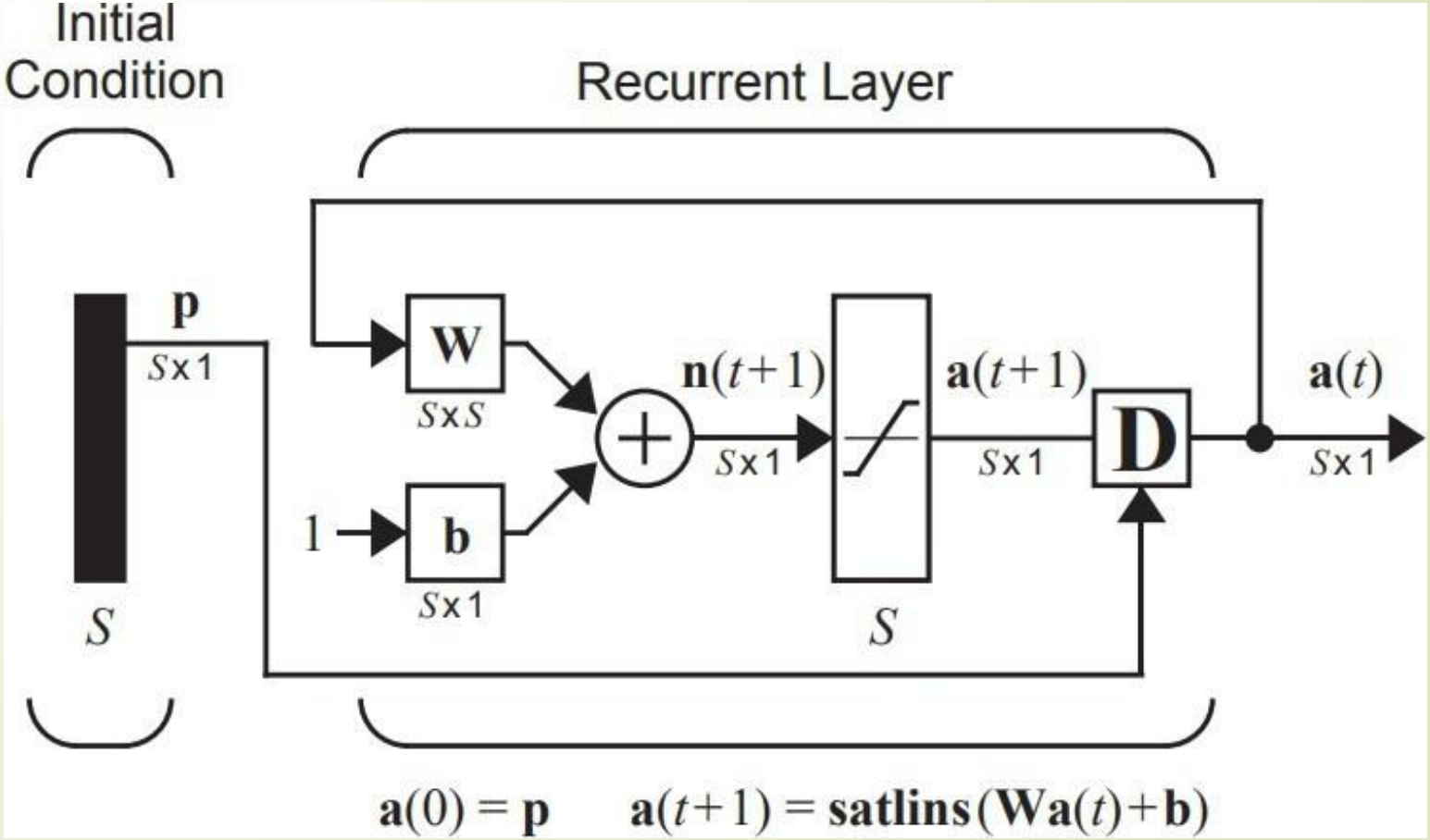
Әрбір итерацияда желінің шығысы W салмақ матрицасына қайтадан көбейтілетініне назар аударыңыз. Бұл қайталанатын операцияның әсері қандай? Желінің шығысы қандай да бір тұрақты күй мәніне жақындайтынын, шексіздікке өтетінін немесе тербелетінін анықтай аламыз ба?

Сызықтық түрлендірулер

Түрлендіру үш бөліктен тұрады:

1. $X=\{X_i\}$ домен деп аталатын элементтер жиыны,
2. $Y=\{y_i\}$ диапазон деп аталатын элементтер жиыны және
3. $x_i \in X$ әрбір элементіне $y_i \in У$ сәйкестендіретін ереже .

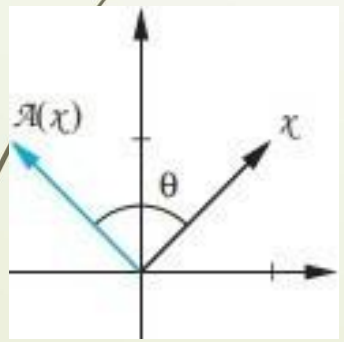
Хопфилд желісі

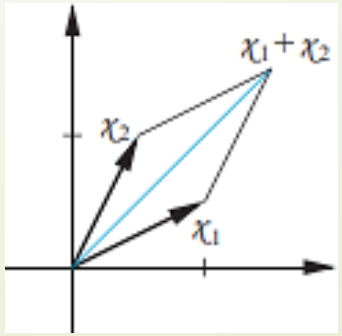


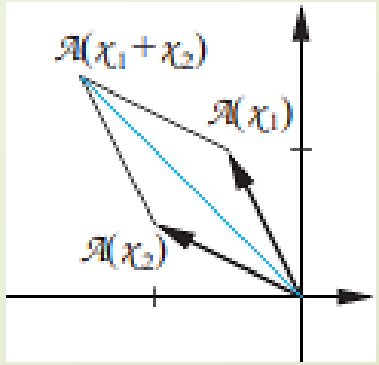
Сызықтық түрлендірулер

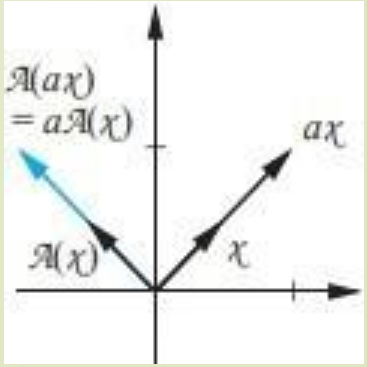
- *A* түрлендіруі сызықты, егер:

1. *Кез келген* x_1 , x_2 ∈ X үшін $A(x_1 + x_2)=A(x_1)+A(x_2)$
2. *Кез келген* x ∈ X және α ∈ R үшін $A(\alpha x)= \alpha A(x)$









Матрицалық жазбалар және базистің (негіздің) өзгеруі

- **Матрицалық бейнелеу:** Шекті өлшемді векторлық кеңістіктегі кез келген сызықтық түрлендіруді таңдалған базиске қатысты матрица түрінде жазуға болады: $y = A x$. Матрицаның бағандары базистік векторлардың түрлендірілген бейнелерінен тұрады.

- **Базисті (негізді) өзгерту:** Бір векторлық кеңістікте бір базистен екінші базиске өткенде вектордың координаттары мен сызықтық түрлендіру матрицасы өзгереді. Егер B — жаңа базис векторларынан құралған көшу матрицасы болса, онда түрлендіру матрицасы $A' = B^{-1} A B$ ұқсастық түрлендіруі арқылы қайта есептеледі. Дұрыс базис таңдау желідегі есептеулерді барынша жеңілдетеді.

Меншікті мәндер және меншікті векторлар

- **Анықтама:** $n \times n$ өлшемді A квадрат матрицасы үшін $A v = \lambda v$ теңдеуін қанағаттандыратын нөлдік емес v векторы **меншікті вектор**, ал λ скаляры **меншікті мән** деп аталады. Геометриялық тұрғыда сызықтық түрлендіру меншікті вектордың бағытын өзгертпейді, тек оны λ есе созады немесе сығады.

- **Есептеу әдісі:** Меншікті мәндер сипаттамалық теңдеуді шешу арқылы табылады: $\det(A - \lambda I) = 0$.

Матрицаны диагональдау (Диагонализация)

- **Мәні:** Егер \(A\) матрицасының \(n\) сызықтық тәуелсіз меншікті векторлары болса, онда осы векторларды жаңа базис ретінде алып, \(A\) матрицасын диагональдық түрге келтіруге болады: \(\Lambda = M^{-1} A M\), мұндағы \(M\) — меншікті векторлардан құралған матрица, ал \(\Lambda \) — бас диагоналінде меншікті мәндер (\(\lambda _{i}\)) орналасқан диагональдық матрица.
- **Нейрондық желілердегі рөлі:** Диагональдау тәуелсіз бағыттар бойынша талдау жүргізуге мүмкіндік береді. Бұл Уидроу-Хофф (LMS) алгоритмінің оқыту жылдамдығын таңдауда, қатенің кері таралуында және Хопфилд желісінің орнықтылық күйге жинақталуын дәлелдеуде шешуші рөл атқарады.

Қорытынды

Бұл дәрісте нейрондық желілердің жұмыс істеуі мен оқытылуын терең математикалық деңгейде талдауға мүмкіндік беретін сызықтық түрлендірулер теориясы қарастырылды. Кіріс векторларын салмақ матрицаларына көбейту амалы сызықтық түрлендіру ретінде сипатталып, оның матрицалық жазылуы мен базисті өзгерту заңдылықтары көрсетілді.

Меншікті мәндер, меншікті векторлар және матрицаларды диагональдау ұғымдарын меңгеру нейрондық желілердің динамикалық мінез-құлқын болжау үшін аса маңызды. Атап айтқанда, бұл математикалық аппарат Хопфилд желісінің итерациялық процесінің тұрақты күйге жинақталу шарттарын анықтауға және өнімділікті оңтайландыру алгоритмдерінің (Уидроу-Хофф, кері таралу) тиімділігін арттыруға негіз болады.

Өзін-өзі бағалау сұрақтары

1. **Сызықтық түрлендіру:** Түрлендіру қандай үш элементтен тұрады? Қандай екі математикалық шарт орындалғанда \(A\) түрлендіруі *сызықтық* деп аталады?

2. **Матрицалық бейнелеу:** Сызықтық түрлендіру матрицасының бағандары қалай құрастырылады? Егер базис өзгерсе, түрлендіру матрицасы қандай формула бойынша қайта есептеледі?

3. **Диагональдау:** Қандай жағдайда \(n \times n\) өлшемді матрицаны диагональдық түрге келтіруге болады? Диагональданған \(\Lambda \) матрицасының элементтері нені білдіреді?

4. **Хопфилд желісімен байланысы:** Хопфилд желісіндегі қайталанатын матрицалық көбейту кезінде салмақ матрицасының меншікті мәндері желінің жинақталуына немесе тербелуіне қалай әсер етеді?

5. **Оқыту алгоритмдеріндегі маңызы:** Неліктен меншікті мәндер мен базисті өзгерту ұғымдары Уидроу-Хофф ережесі мен қатені кері тарату алгоритмдерін түсіну үшін қажет?

Әдебиеттер тізімі

1. **Хейган М. Т., Демут Х. Б., Бил М. Х., Де Хесус О.** Нейронные сети. Дизайн и применение (Neural Network Design). — М.: ДМК Пресс, 2021. — 800 с. *(6-тарау: «Линейные преобразования в нейронных сетях» — Хопфилд желісінің динамикасы, сызықтық түрлендірулер, меншікті мәндер және диагональдау).*

2. **Стренг Г.** Линейная алгебра и ее применения. — М.: Мир, 2015. — 454 с. *(Сызықтық түрлендірулер, базисті ауыстыру, меншікті мәндер, меншікті векторлар және матрицаларды диагональдау).*

3. **Гудфеллоу Я., Бенджио И., Курвилль А.** Глубокое обучение. — М.: ДМК Пресс, 2018. — 652 с. *(2-тарау: «Линейная алгебра» — меншікті мәндер бойынша жіктеу / eigendecomposition).*

4. **Хайкин С.** Нейронные сети: полный курс. — 2-е изд. — М.: Издательский дом «Вильямс», 2018. — 1104 с. *(Корреляциялық матрицаның меншікті мәндері және градиенттік оқытудың жинақталуы).*

5. **Қазанғапов А. С., Тілеубердиев С. Т.** Сызықтық алгебра және аналитикалық геометрия: Оқу құралы. — Алматы: Қазақ университеті, 2019. — 260 б. *(Қазақ тіліндегі сызықтық операторлар, базисті түрлендіру және меншікті векторлар теориясы).*