№ 5-дәріс

Теңдеу туралы жалпы түсініктер. Алгебралық түзулер мен беттер. Жазықтықтағы түзулердің және кеңістіктегі жазықтықтардың теңдеулерінің түрлері. Жазықтықтағы жазықтықтар мен түзулердің параллельдігінің критерийлері.

Лекцияның мақсаты

Студенттерді кеңістіктегі түзулер мен жазықтықтардың теңдеулерімен, олардың түрлерімен, жазықтықтар мен түзулердің өзара орналасу белгілерімен (параллельдік және перпендикулярлық критерийлері), нүктеден түзуге дейінгі қашықтық формулаларымен және екі жазықтықтың, екі түзудің, түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрышты табу әдістерімен таныстыру. Геометриялық объектілердің аналитикалық сипаттамасын түсіндіру.

Негізгі сұрақтар

Негізгі сұрақтар:

1. Жазықтықтың берілген нүкте және нормаль вектор арқылы теңдеуі
2. Жазықтықтың жалпы теңдеуі
3. Үш нүкте арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуі
4. Жазықтықтың кесінділік (координаталық) теңдеуі
5. Екі жазықтықтың арасындағы бұрыш
6. Нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтық
7. Екі нүкте арқылы өтетін түзу теңдеуі
8. Түзудің канондық теңдеуі
9. Түзудің параметрлік теңдеуі
10. Түзудің жалпы теңдеуі (екі жазықтықтың қиылысы ретінде)
11. Екі түзудің арасындағы бұрыш
12. Түзу мен жазықтық арасындағы бұрыш

Қысқаша мазмұн

Қысқаша мазмұн :
Бұл дәрісте кеңістіктегі жазықтықтар мен түзулердің алгебралық теңдеулерін жазу әдістері қарастырылады. Жазықтықтың нормаль векторы бойынша теңдеуі, жалпы теңдеуі және үш берілген нүкте арқылы өтетін түрі анықталады. Сондай-ақ жазықтықтың кесінділік теңдеуі мен оның геометриялық мағынасы түсіндіріледі. Екі жазықтықтың арасындағы бұрыш нормаль векторлар арқылы табылатыны, олардың параллельдігі немесе перпендикулярлығы нормаль компоненттері арқылы анықталатыны көрсетіледі. Нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтық формуласы беріледі. Түзудің екі нүкте арқылы, параметрлік және канондық теңдеулері енгізіледі, ал түзу жалпы түрде екі жазықтықтың қиылысу сызығы ретінде қарастырылады. Екі түзудің немесе түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрышты табу формулалары да толық түсіндіріледі. Дәріс соңында бұрыш табу, қашықтық анықтау және қиылысу нүктесін есептеу мысалдары келтірілген.

Жазықтықтың теңдеуі

1. Берілген нүкте арқылы, берілген векторға перпендикуляр өтетін жазықтықтың теңдеуі

Жазықтықта $M_0(x_0; y_0; z_0)$ нүктесі және оған перпендикуляр $\bar{n} = (A; B; C)$ векторы берілсін. Сонда берілген нүкте арқылы, берілген векторға перпендикуляр өтетін жазықтықтың теңдеуі төмендегідей болады:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (5.1)$$

2. Жазықтықтың жалпы теңдеуі

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (5.2)$$

Егер $D=0$ болса, онда жазықтық бас нүкте арқылы өтеді; егер $C=0$ онда, жазықтық Oz өсіне параллель өтеді; егер $C=D=0$ болса, онда жазықтық бас нүкте арқылы Oz өсіне параллель өтеді; егер $A=B=D=0$ болса, онда $z=0$ болады. Бұл Oxy жазықтығы.

Жазықтықтың теңдеуі

3. Үш нүкте арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуі. $M_0(x_0;y_0;z_0)$, $M_1(x_1;y_1;z_1)$ және $M_2(x_2;y_2;z_2)$ нүктелері арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуі:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (5.3)$$

4. Жазықтықтың кесінділік теңдеуі

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \qquad (5.4)$$

Екі жазықтықтың арасындағы бұрыш

5. Екі жазықтықтың арасындағы бұрыш. Жазықтықтар $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ және $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ теңдеулерімен берілсе, онда $\bar{n}_1=(A_1;B_1;C_1)$, $\bar{n}_2=(A_2;B_2;C_2)$ болғандықтан жазықтықтардың арасындағы бұрыш осы екі нормальдің арасындағы бұрышқа тең:

$$\cos\varphi=\frac{\overline{n_1}\,\overline{n_2}}{\left|\overline{n_1}\right|\left|\overline{n_2}\right|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} \qquad (5.5)$$

Осыдан егер жазықтықтар параллель болса, онда $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$, ал перпендикуляр болса, онда $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$ болады.

Нүктеден түзуге дейінгі қашықтық

6. Нүктеден түзуге дейінгі қашықтық

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесінен $Ax + By + Cz + D = 0$ түзуіне дейінгі қашықтықтың формуласы:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad (5.6)$$

Кеңістіктегі түзудің теңдеулері

Кеңістіктегі түзудің теңдеулері

1. Екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуі. Түзу $M_0(x_0, y_0, z_0)$ және $M_1(x_1, y_1, z_1)$ нүктелерінен өтсе, онда оның теңдеуі:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \qquad (5.7)$$

2. Түзудің канондық теңдеуі

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесі түзудің бойында жатсын және ол түзу $\bar{a} = (m; n; p)$ векторына параллель болсын. Түзудің бойынан кез келген $M(x; y; z)$ нүктесін аламыз. Сонда, $\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$. $\overline{M_0M}$ векторы түзудің бойында жатқандықтан $\overline{M_0M} \parallel \bar{a}$ болады. Сондықтан түзудің канондық теңдеуі:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

Мұндағы $\bar{a} = (m; n; p)$ – бағыттаушы вектор деп аталады.

Түзудің параметрлік және жалпы теңдеулері

3. Түзудің параметрлік теңдеуі. (5.7) теңдеуіндегі әр теңдікті t −ға теңеп, мына теңдеуді аламыз:

$$x = x_0 + mt, \qquad y = y_0 + nt, \qquad z = z_0 + mt \tag{5.9}$$

4. Түзудің жалпы теңдеуі. Өзара параллель емес екі жазықтық жалпы теңдеулерімен берілсін:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0\,, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \tag{5.10}$$

Сонда бұл жазықтықтар бір түзудің бойымен қиылысады. Ендеше осы екі жазықтықтың қиылысқан түзуінің бойындағы кез келген нүктенің координаттары екі жазықтықтың да теңдеуін қанағаттандырады. Сондықтан осы екі теңдеулер жүйесін түзудің жалпы теңдеуі дейді.

Екі түзудің арасындағы бұрыш

5. Екі түзудің арасындағы бұрыш. Екі түзу канондық теңдеулерімен берілсін: $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ және $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$. Екі түзудің арасындағы бұрыш, сол түзулердің бағыттаушы векторларының арасындағы бұрышқа тең ($\overline{a}_1=(m_1;n_1;p_1)$, $\overline{a}_2=(m_2;n_2;p_2)$):

$$\cos\varphi=\frac{\overline{a_1}\,\overline{a_2}}{|\overline{a_1}||\overline{a_2}|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}} \qquad (5.10)$$

Егер түзулер өзара параллель болса, онда $\overline{a_1}\parallel\overline{a_2}$ болады. Түзулердің параллелдік шарты: $\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$, егер түзулер өзара перпендикуляр болса, онда $\overline{a_1}\perp\overline{a_2}$ болады. Түзулердің перпендикулярлық шарты: $m_1m_2+n_1n_2+n_1n_2=0$ болады.

Түзу мен жазықтық

Түзу мен жазықтық. Жалпы теңдеуімен берілген $Ax + By + Cz + D = 0$ – жазықтық пен канондық теңдеуімен түзудің $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$ арасындағы бұрышты табу керек.

Түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрыш деп, осы түзу мен оның жазықтыққа түсірілген проекциясының арасындағы сыбайлас бұрыштың біреуін айтады. Түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрыштың синусы мына формуламен есептелінеді:

$$\sin\psi = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} \qquad (5.11)$$

Түзу мен жазықтықтың параллелдік белгісі: $Am + Bn + Cp = 0$. Түзу мен жазықтықтың перпендикулярлық белгісі: $\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$.

1-мысал

1-мысал. $x=2+2t,\ \ y=-1-t,\ \ z=3+t$ түзуі мен $x+3y-z+6=0$ жазықтығының арасындағы бұрыштың синусы мен қиылысу нүктесін табу керек. $\bar{n}=(1;3;-1)$, ал $\bar{a}=(2;-1;1)$ болғандықтан $\sin\psi=\dfrac{2-3-1}{\sqrt{1+9+1}\cdot\sqrt{4+1+1}}=\dfrac{-2}{\sqrt{66}}$. Қиылысу нүктесін табу үшін түзу мен жазықтықтың теңдеулер жүйесін шешеміз.

Сонда $2+2t-3-3t-3-t+6=0\Rightarrow -2t+2=0\Rightarrow t=1.$

Осыдан $x=4,\ y=-2,\ z=4$, яғни $N(4,-2,4)$.

Өзіңді тексеруге арналған сұрақтар

Өзіңді тексеруге арналған сұрақтар:

1. Жазықтықтың нормаль вектор арқылы берілетін теңдеуі қандай?
2. Жазықтықтың жалпы теңдеуіндегі A, B, C коэффициенттерінің геометриялық мағынасы қандай?
3. Үш нүкте арқылы өтетін жазықтық теңдеуі қалай шығарылады?
4. Жазықтықтың кесінділік теңдеуі қашан қолданылады және оның мағынасы қандай?
5. Екі жазықтық арасындағы бұрышты қалай табуға болады?
6. Нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтық формуласы қалай жазылады?
7. Екі нүкте арқылы өтетін түзудің параметрлік теңдеуін қалай жазамыз?
8. Түзудің канондық теңдеуі қандай және қандай жағдайда қолданылады?
9. Екі түзудің параллельдігі мен перпендикулярлығын қалай анықтаймыз?
10. Түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрыштың синусы қандай формуламен анықталады?
11. Түзу мен жазықтықтың қиылысу нүктесі қалай табылады? (талдауды мысалмен түсіндіруге болады)

Қолданылған әдебиет тізімі

Қолданылған әдебиет тізімі:
1.Қабдықайырұлы Құрмет және т.б.. Жоғары математика.- Алматы, 2002
2. А.К. Дүйсек, С.Қ. Қасымбеков. Оқу құралы. – Алматы: ЖСШ «інжу маржан», 2004
3. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: ФМЛ, 2004.
4. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – Серия: Учебники для вузов. Специальная литература, 2-е издание, стереотипное, Санкт-Петербург: Издательство «Лань», 2009, 512 с.
5. http://elibrary.kaznu.kz/ru
6. МООС/видеолекции