№ 11-дәріс

Анықталмаған интеграл. Негізгі интегралдар кестесі. Интегралдау әдістері.

Лекцияның мақсаты

Бұл дәрістің мақсаты – анықталмаған интеграл ұғымын, алғашқы функцияны табу идеясын, интегралдардың негізгі қасиеттерін, анықталмаған интегралдардың негізгі кестесін және интегралдаудың негізгі әдістерін (айнымалыны алмастыру, дифференциал астына енгізу, бөліктеп интегралдау) түсіндіру. Студенттерге интегралдау формулаларын дұрыс қолдану, күрделі интегралдарды қарапайым түрге келтіру, есептерді аналитикалық тәсілдермен шешуді үйрету көзделеді

Қысқаша мазмұны

Қысқаша мазмұны

Дәрісте алғашқы функция ұғымы мен оның анықтамасы қарастырылады; анықталмаған интегралдың негізгі қасиеттері және интегралдау белгілерінің мағынасы түсіндіріледі. Интегралдаудың негізгі кестесі беріліп, стандартты функциялардың алғашқы функциялары көрсетіледі. Айнымалыны алмастыру әдісі, дифференциал астына енгізу әдісі және бөліктеп интегралдау әдісі нақты мысалдармен бірге түсіндіріледі. Әр әдістің қолдану жағдайлары мен тиімділігі көрсетіліп, алынған формулалардың шығу жолдары мысалдар арқылы бекітіледі.

Негізгі сұрақтар

Негізгі сұрақтар

1. Алғашқы функция ұғымы және оның анықтамасы
2. Анықталмаған интеграл және оның белгіленуі
3. Интегралдың негізгі қасиеттері
4. Негізгі интегралдар кестесі
5. Айнымалыны алмастыру әдісі
6. Дифференциал астына енгізу әдісі
7. Бөліктеп интегралдау формуласы
8. Әр әдіс бойынша есептерді шешу мысалдары

Алғашқы функция

Анықтама. Егер $x \in (a,b)$ аралығында берілген $f(x)$ функциясы үшін $F'(x) = f(x)$ теңдігі орындалса, онда $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясының (a,b) аралығындағы ***алғашқы функциясы*** деп аталады. Басқаша айтқанда, берілген функцияның алғашқы функциясын табу – оның туындысын табуға кері есеп болып саналады.

C – кез келген тұрақты шама (константа), яғни кез келген сан болсын. Егер $f(x)$ функциясының алғашқы функциясы $F(x)$ болса, онда $F(x)+C$ функциясы да оның алғашқы функциясы болады, себебі $\left[F(x)+C\right]' = \left[F(x)\right]' = f(x)$. $F(x)+C$ функциясы $f(x)$ функциясының барлық алғашқы функцияларын анықтайды.

Анықталмаған интеграл

Анықтама. Егер $F'(x) = f(x)$ болса, онда $F(x) + C$ функциясын $f(x)$ функциясының анықталмаған интегралы дейді және ол $\int f(x)dx$ символымен белгіленеді.

Сонымен, $\int f(x)dx = F(x) + C$ мұндағы $\int$ – интеграл белгісі, dx – x айнымалысының дифференциалы, $f(x)dx$ – интеграл астындағы өрнек. Берілген функцияның анықталмаған интегралын табу жолын осы функцияны интегралдау дейді.

Анықталмаған интегралдардың қасиеттері

Анықталмаған интегралдардың қасиеттері

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$;
3. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, мұндағы k – кез келген сан;
4. $\int\left(f(x)\pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$;
5. $\int dF(x) = F(x) + C$, мұндағы C - кез келген сан.

Практикада интегралдау үшін келесі интегралдар кестесін жатқа білген жөн.

Анықталмаған интегралдардың негізгі кестесі

Анықталмаған интегралдардың негізгі кестесі

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$.
2. $\int \frac{dx}{x} = ln|x| + C$.
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$.

Дербес жағдайда, $\int e^x dx = e^x + C$.

4. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.
5. $\int \cos x dx = \sin x + C$.
6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.
7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.
8. $\int tgx dx = -ln|\cos x| + C$.
9. $\int ctgx dx = ln|\sin x| + C$.
10. $\int \frac{dx}{\sin x} = ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$.
11. $\int \frac{dx}{\cos x} = ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$.
12. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$.
13. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C \quad (a > 0)$.
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C \quad (a > 0)$.
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arcsin\frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$.
16. $\int shx dx = chx + C$.
17. $\int chx dx = shx + C$.
18. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$.
19. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$.

Кестедегі кез келген интегралды тексеру үшін теңдіктің оң жағынан туынды алу керек.

Айнымалыны алмастыру әдісі

Интегралдаудың негізгі әдістері

1. Анықталмаған интегралда айнымалыларды алмастыру. Айнымалыны алмастыру әдісі мына формулаға негізделген

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (12.1)$$

Мұндағы $x = \varphi(t)$ – берілген аралықта дифференциалданатын функция. Тиімді табылған айнымалыны алмастыру формуласы берілген интегралды жеңіл интегралдайтын интегралға, ал кейбір жағдайларда таблицалық интегралға келтіреді.

1-мысал

1- мысал. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}+1}$ интегралын табу керек.

Ол үшін $2x+1=t^2$ алмастыруын жасаймыз. Сонда $x=\frac{t^2-1}{2}$ болады.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}+1} = \left| x=\frac{t^2-1}{2},\quad dx=\left(\frac{t^2-1}{2}\right)'dt=tdt \right| = \int \frac{tdt}{t+1} =$$

$$= \int \frac{(t+1)-1}{t+1}dt = \int\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt = t-ln|t+1|+C = \left|t=\sqrt{2x+1}\right| = \sqrt{2x+1}-ln\left|\sqrt{2x+1}+1\right|+C\,.$$

Мұнда интегралдаудың соңында бастапқы x – айнымалысына көшу керек.

Дифференциал астына енгізу әдісі

2. Дифференциал астына енгізу әдісі. Бұл әдіс айнымалыны ауыстыру сияқты жиі қолданылады. Интеграл астындағы функцияның көбейткіштерінің біреуін d белгісінің астына жазамыз да, оны жаңа айнымалы ретінде қарастырамыз. Еске сала кетейік, $u'(x)$ функциясын dx таңбасының астына жазғанда d таңбасынан кейін функцияның алғашқы функциясы жазылады, яғни $u'(x)dx = du(x)$.

Салдар. Айталық $y = f(u)$ үзіліссіз және $u = u(x)$ үзіліссіз дифференциалданатын функциялар болсын, онда

$$\int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u)du \qquad (12.2)$$

2-мысал және 3-мысал

2-мысал. $\int \frac{\ln x}{x} dx = \int (\ln x) \frac{1}{x} dx = \int \ln x d \ln x = \left| \ln x = u \right| = \int u du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C$.

Бұл формулада d таңбасының астына $\frac{1}{x}$ функциясын енгізіп $\ln x$ деп жаздық. Модуль таңбасын қолданбаса да болады, себебі интеграл астындағы функция тек $x > 0$ болғанда анықталады. Дифференциал таңбасы астында кез келген функцияның алғашқы функциясына тұрақтыны қосып пайдалануға болады.

3- мысал. $\int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2 + 1} dx^2 = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \left| x^2 + 1 = u \right| =$

$$\frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln |u| + C == \frac{1}{2} \ln (x^2 + 1) + C .$$

Бөліктеп интегралдау әдісі

3. Бөліктеп интегралдау әдісі. Айталық, $u = u(x)$, $v = v(x)$ – дифференциалданатын функциялар болсын. Онда $d(u \cdot v) = udv + vdu$ теңдігі орындалады. Немесе $udv = d(u \cdot v) - vdu$. Осы теңдіктің екі жағынан интеграл алайық, сонда

$$\int udv = \int d(u \cdot v) - \int vdu .$$

Осыдан

$$\int udv = uv - \int vdu \qquad (12.3)$$

формуласын аламыз. (12.3) формуласын ***бөліктеп интегралдау формуласы*** дейді. Кейбір жағдайда бөліктеп интегралдау формуласын қолдану арқылы берілген интегралды алғашқыға қарағанда анағұрлым жеңіл алынатын интегралға келтіруге болады.

4-мысал және 5-мысал

4- мысал. $\int arctgxdx = \left| \begin{array}{l} arctgx = u\ , \\ du = \dfrac{1}{1+x^2}dx \\ dv = dx,\ v = x \end{array} \right| = xarctgx - \int \frac{x}{1+x^2}dx = xarctgx - \frac{1}{2}ln(\ x^2\ +1\ ) + C$

5 - мысал. $\int x\cos x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, du = dx, \\ \cos xdx = dv,\ v = \sin x \end{array} \right| = x\sin x - \int sinxdx = x\sin x + \cos x + C\ .$

Өзіңді тексеруге арналған сұрақтар

Өзіңді тексеруге арналған сұрақтар

1. Алғашқы функция дегеніміз не?
2. Анықталмаған интегралдың анықтамасын жазыңыз.
3. Интегралдың қандай негізгі қасиеттері бар?
4. $\int x^n dx$формуласы қандай шартта қолданылады?
5. Айнымалыны алмастыру әдісінің идеясы неде?
6. Дифференциал астына енгізу әдісі қалай орындалады?
7. Бөліктеп интегралдау формуласын жазыңыз.
8. Қандай жағдайда бөліктеп интегралдауды қолдану тиімді?

Әдебиеттер

Әдебиеттер:
1. Н. Махмеджанов. Жоғарғы математикадан тапсырмалар жинағы. Оқу құралы – Алматы: Қазақ университеті, 2014
2. Қасымов, Қ.Ә.. Жоғарғы математика курсы. – Алматы, 2006
3. Е.Ж. Айдос Жоғары математика. Оқу құралы. – Алматы: Уль-Тек-Китап, 2003.

Интернет-ресурсы
4. Электронные ресурсы издательства Springer. URL: http://link.springer.com/search?facet-content-type=%22Book%22&showAll=false.
5. Электронные ресурсы издательства Elsevier. URL: http://www.info.sciverse.com/sciencedirect/ books/subjects/mathematics.