№ 14-дәріс

Анықталған интеграл

Лекцияның мақсаты

Бұл дәрістің мақсаты – анықталған интегралды геометриялық есептерде қолдану тәсілдерін меңгерту, соның ішінде жазық фигуралардың ауданын, параметрлік және поляр координаталардағы аймақтардың ауданын, қисық доғасының ұзындығын, айналу денелерінің көлемі мен айналу бетінің ауданын есептеу формулаларын түсіндіру. Сонымен бірге меншіксіз интегралдардың анықтамасын, олардың жинақтылық және жинақсыздық шарттарын, ақырсыз шектері бар және ақырсыз функциялардан алынатын интегралдарды есептеу жолдарын үйрету.

Негізгі сұрақтар

Негізгі сұрақтар

1. Жазық фигураның ауданын анықталған интеграл арқылы табу
2. Параметрлік түрде берілген қисықпен шектелген аудан
3. Поляр координаталарындағы аудан формуласы
4. Қисық доғасының ұзындығы
   – декарт координаталарында
   – параметрлік түрде
   – поляр координаталарында
5. Айналу денесінің көлемі (Жуықтау цилиндрлері әдісі)
6. Айналу бетінің ауданы
7. Меншіксіз интегралдар
   – ақырсыз шектері бар
   – ақырсыз функциялар
   – үздіксіз емес нүктесі бар функциялар үшін анықтама
8. Интегралдың жинақтылығы және жинақсыздығы
9. Мысалдар: синусоиданың астындағы аудан, эллипс ауданы, лемниската, көлем және бет ауданы

Қысқаша мазмұн

Қысқаша мазмұн

Дәрісте анықталған интегралды геометриялық есептерде қолдану қарастырылады: функция графигімен, осьпен және тік сызықтармен шектелген аймақтың ауданы ∫f(x)dx арқылы анықталатыны түсіндіріледі. Екі функция арасындағы аудан, параметрлік теңдеумен және поляр координаталарымен берілген қисықтар үшін аудандар формулалары енгізіледі. Сонымен қатар қисық доғасының ұзындығын табу формулалары үш түрлі жағдайда (декарт, параметрлік және поляр) келтірілген. Айналу денесінің көлемі π∫f(x)^2 dx және айналу бетінің ауданы 2π∫f(x)√(1+(f’(x))²)dx формулаларымен есептелетіні түсіндіріледі. Кейін меншіксіз интегралдар анықталып, ақырсыз шектері бар және функциясы ақырсыз болатын жағдайлар үшін жинақтылық және жинақсыздық шарттары мысалдармен түсіндірілген.

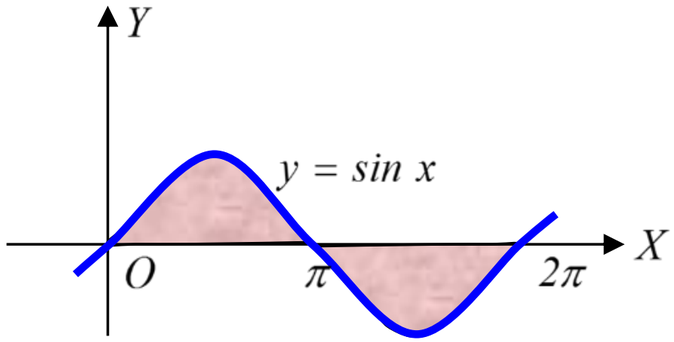
Жазық фигураның ауданын табу

Жазық фигураның ауданын табу.

а) $y = f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде теріс емес және үзіліссіз болсын. Онда жоғарыдан $y = f(x)$ функциясының графигімен, төменнен Ox өсімен, ал бүйір жақтарынан $x = a,\ x = b$ түзулерімен қоршалған қисық сызықты трапецияның ауданы $\int_a^b f(x)dx$ интегралына тең болады, яғни $S = \int_a^b f(x)dx$. Егер $[a,b]$ кесіндісінде $f(x) \le 0$ болса, онда қисық сызықты трапеция Ox өсінің төменгі жағына орналасқан және $S = -\int_a^b f(x)dx$ болады.

1-мысал

1-мысал. $y = \sin x$ синусоидасымен және Ox өсімен шектелген фигураның ауданын табу керек ($0 \le x \le 2\pi$).



$[0, \pi]$ аралығында $\sin x \ge 0$, ал $[\pi, 2\pi]$ аралығында $\sin x \le 0$ болғандықтан, берілген облыстың ауданын табайық

$$S = \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} + \cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} = -\cos\pi + \cos 0 + \cos 2\pi - \cos\pi = 4 .$$

б) $x = a,\ x = b$ түзулерімен және $[a, b]$ аралығында үзіліссіз $y = f_1(x),\ y = f_2(x)$ (мұндағы $f_1(x) \ge f_2(x)$) функциялардың графиктерімен шектелген фигураның ауданы мына формуламен табылады. $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$

Параметрлік түрде берілген қисықпен шектелген аудан

в) Егер $[a,b]$ кесіндісінде $y=f(x)$ функциясының графигі параметрлік функция түрінде берілсін $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta$ мұндағы $y(t) \ge 0$ үзіліссіз, ал $x(t)$ функциясы $[\alpha,\beta]$ кесіндісінде бір сарынды, үзіліссіз дифференциалданатын функция, ал $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ болса, онда қисық сызықты трапецияның ауданы мына формуламен табылады

$$S=\int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt .$$

2–мысал. Жарты өстері a және b болатын эллипстің жоғарғы жағындағы жарты бөлігінің параметрлік теңдеуі былай беріледі: $x=a\cos t,\ y=b\sin t,\ 0 \le t \le \pi$. Егер $t=0$ десек, онда $x=a$, ал $t=\pi$ десек $x=-a$ тең болады. Сонда эллипстің ауданы былай табылады

$$S=2\int_{\pi}^{0} b\sin t(a\cos t)'dt=2ab\int_{0}^{\pi}\sin^2 t dt=2ab\int_{0}^{\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=ab\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{0}^{\pi}=$$

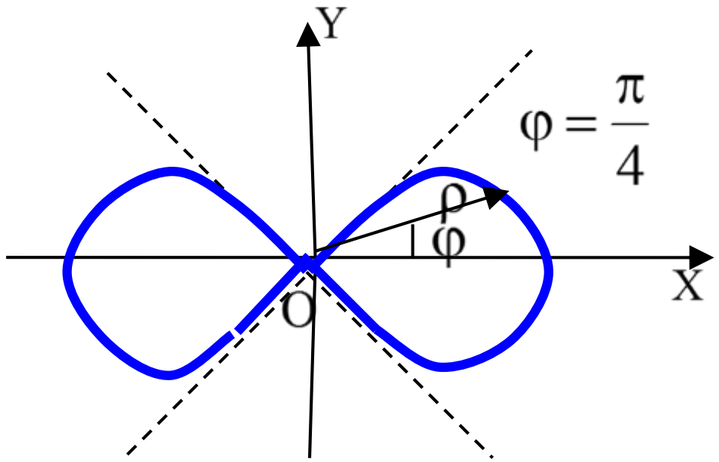
$$=ab\left(\pi-\frac{\sin 2\pi}{2}\right)-ab\cdot 0=\pi ab .$$

Поляр координаттарындағы аудан

Поляр координаттарындағы аудан. Координат төбесінен шығатын сәулелермен $\varphi = \varphi_1$ және $\varphi = \varphi_2$ (мұндағы $\varphi_1 < \varphi_2$) және теріс емес $\rho = f(\varphi)$ функциясының $[\varphi_1, \varphi_2]$ кесіндідегі үзіліссіз графигімен шектелген қисықсызықты үшбұрыштың ауданы мына формуламен есептелінеді: $S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f^2(\varphi)d\varphi$

3-мысал

3-мысал. $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ қисығымен шенелген облыстың ауданын табамыз. Бұл қисық Бернулли лемнискатасы деп аталады.



$\cos 2\varphi \geq 0$ шартынан интегралдау облысы табылады. Осыдан $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$ $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ үшін бүкіл облыстың $\frac{1}{4}$ -ін құрайды.

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\pi/4} \left(a\sqrt{\cos 2\varphi}\right)^2 d\varphi = 2a^2 \int_0^{\pi/4} \cos 2\varphi d\varphi = a^2 \sin 2\varphi \Big|_0^{\pi/4} = a^2 \sin\frac{\pi}{2} - a^2 \sin 0 = a^2 .$$

Қисық доғасының ұзындығы

3. Қисық доғасының ұзындығы

а) Егер қисық декарт координаттар жүйесінде $y = f(x),\ x \in [a, b]$ теңдеуімен берілсе, онда қисықтың доғасының ұзындығы мына формуламен есептелінеді:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx .$$

б) Егер қисық параметрлік түрде $x = x(t),\quad y = y(t),\ t \in [\alpha, \beta]$ берілсе, онда қисықтың доғасының ұзындығы мына формуламен есептелінеді: $l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$.

в) Егер қисық сызық полярлық координаталар арқылы берілсе, яғни

$$\rho = f(\varphi)\ (\varphi \in [\alpha, \beta]),\ \text{онда}\ l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(f(\varphi))^2 + (f'(\varphi))^2}\, d\varphi .$$

Айналу денесінің көлемі

Айналу денесінің көлемі. Үзіліссіз $y = f(x) \geq 0, a \leq x \leq b$ сызығымен және $x = a,\ x = b$ түзулерімен шектелген қисық сызықты трапеция Ox өсінен айналуынан пайда болған айналу денесінің көлемі мына формуламен есептелінеді: $V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx$.

4-мысал. $y = x^2$, $x \in [0,1]$ функциясының графигімен берілген қисық сызықты трапецияның Ox өсінен айналуынан пайда болған дененің көлемін табу керек. Жоғарыдағы формуланы қолданамыз $V = \pi \int_0^1 (x^2)^2 dx = \pi \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{5}$.

Айналу бетінің ауданын табу

Айналу бетінің ауданын табу. Айталық, үзіліссіз дифференциалданатын $y = f(x)$, ($x \in [a,b]$ және $f(x) \geq 0$) функциясының графигі Ox өсінен айналсын. Пайда болған айналу бетінің ауданы:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

Меншіксіз интегралдар

Меншіксіз интегралдар. Анықталған интегралды қарастырғанда интегралдың төменгі және жоғары шектері – ақырлы сандар және интеграл астындағы функция – интегралдау аралығында ақырлы функция болуын талап еттік. Егер осы қойылған шарттардың біреуі орындалмаса, интеграл ***меншіксіз интеграл*** деп аталады.

1. Ақырсыз шектері бар меншіксіз интегралдар. Айталық, $y = f(x)$ функциясы $[a,+\infty)$ аралығында үзіліссіз болсын. Осы функциядан a-дан $+\infty$ дейін алынған меншіксіз интеграл деп мына шекті айтамыз: $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$. Егер осы шек бар (санға тең) болса, онда меншіксіз интегралы жинақты, ал шегі жоқ немесе шексіздікке тең болса, онда интеграл жинақсыз деп аталады. Егер $[a,+\infty)$ аралығында $f(x) \geq 0$ болса, онда мұндай интеграл шекаралары: $y = 0$, $x = a$ $(x \geq a)$ түзулерімен және $y = f(x)$ функциясының графигімен шектелген фигураның ауданын береді. Жинақты интеграл үшін бұл аудан шектеулі, ал жинақсыз интеграл үшін шектеусіз болады.

5-мысал

5-мысал. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \ln x \Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} (\ln b - \ln 1) = \infty$. Демек, интеграл жинақсыз.

Айталық, $y = f(x)$ функциясы $(-\infty, b]$ аралығында үзіліссіз болсын. Сонда $-\infty$-тен b-ға дейінгі меншіксіз интеграл деп мына шекті айтамыз $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx$.

Мұндай интеграл ($f(x) \geq 0$ болғанда) шекаралары $y = 0$, $x = b$ $(x \leq b)$ және $y = f(x)$ болған фигураның ауданын өрнектейді.

Егер $y = f(x)$ функциясы бүкіл сандар өсінде үзіліссіз болса, онда $-\infty$-тен $+\infty$-ке дейінгі меншіксіз интеграл деп мына екі интегралдың қосындысын айтамыз

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx$$

(мұнда c-кез келген сан). Бұл анықтама c-ны таңдап алуға байланыссыз. Мұндағы екі интеграл да жинақты болса, онда ол интеграл жинақты деп аталады. $\int_{-\infty}^{c} f(x)dx$ және $\int_c^{+\infty} f(x)dx$. Егер осы интегралдың біреуі жинақсыз болса, онда $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ интегралы жинақсыз деп аталады.

Ақырсыз функцияның меншіксіз интегралы

2. Ақырсыз функцияның меншіксіз интегралы

Айталық, $y = f(x)$ функциясы $[a,b)$ аралығында үзіліссіз, ал $x = b$ нүктесінде ақырсыз болсын. a -дан b -ның сол жағына дейін осы функциядан алынған меншіксіз интеграл деп сол жақ шекті айтады.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx .$$

Егер $y = f(x)$ функциясы $(a,b]$ аралығында үзіліссіз, ал a нүктесінде үзілісті болса, онда a -ның оң жағынан b -ға дейінгі осы функцияның меншікті интегралы деп мына оң жақ шекті айтады

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx .$$

Ақырсыз функцияның меншіксіз интегралы

6-мысал. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{0+\varepsilon}^1 x^{-2}dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{x^{-1}}{-1}\Big|_{0+\varepsilon}^1 = -\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(1-\frac{1}{0+\varepsilon}\right) = \infty$, яғни, интеграл жинақсыз.

Мына меншіксіз интегралдардың жазылуы жақсылық емес (зұлымдық), себебі үзіліссіз функциялардың анықталған интегралдарынан айырмашылығы жоқ.

Айталық, $y = f(x)$ функциясы $[a,b]$ аралығындағы (a,b) интервалының үзіліске ұшырайтын c нүктесінен басқа жерлерінде үзіліссіз болсын. Сонда осы кесіндіден алынған меншіксіз интегралы деп келесі екі меншіксіз интегралдардың қосындысын айтамыз.

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx\ .$$

Оң жағындағы екі интеграл жинақты болса, онда мұндай интегралды жинақты деп атайды.

Өзіңді тексеруге арналған сұрақтар

Өзіңді тексеруге арналған сұрақтар

1. Жазық фигураның ауданын $\int f(x)dx$ көмегімен қалай табады?
2. Екі функция арасындағы аудан формуласы қандай?
3. Параметрлік түрде берілген қисықпен шектелген аудан қалай есептеледі?
4. Поляр координаталарындағы аудан формуласы қалай жазылады?
5. Қисық доғасының ұзындығының формуласы қандай?
6. Айналу денесінің көлемі қандай формуламен табылады?
7. Айналу бетінің ауданының формуласы қандай?
8. Меншіксіз интеграл дегеніміз не?
9. Қандай жағдайда меншіксіз интеграл жинақты деп аталады?
10. Ақырсыз функция үшін интегралды қалай анықтайды?

Әдебиеттер

Әдебиеттер:
1. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа, 2005. Т.1. Т.2.
2. Индивидуальные задания по высшей м атем атике : учеб, пособие. В 4 ч. под общ. ред. А .П . Рябушко. - 5-е изд. – Минск : Выш. шк., 2009. - 304 с.
3. Электронная библиотека механико-математического факультета МГУ. URL: lib.mexmat.ru.
4. Электронные ресурсы издательства Springer. URL: http://link.springer.com/search?facet-content-type=%22Book%22&showAll=false.
5. Электронные ресурсы издательства Elsevier. URL: http://www.info.sciverse.com/sciencedirect/ books/subjects/mathematics.