№ 12-дәріс

Кейбір тригонометриялық функцияларды интегралдау. Жай бөлшектерді интегралдау. Рационал функцияларды интегралдау. Кейбір иррационал функцияларды интегралдау.

Дәрістің мақсаты

Бұл дәрістің мақсаты – рационал, иррационал және тригонометриялық функцияларды интегралдаудың негізгі әдістерін терең меңгерту; квадрат үшмүшелігі бар функцияларды интегралдауда толық квадрат бөлу, айнымалыны алмастыру және тригонометриялық алмастыру тәсілдерін қолдануды үйрету; дұрыс рационал бөлшектерді қарапайым бөлшектерге жіктеу теоремасын меңгерту; реккуренттік формулаларды пайдаланып интегралдарды есептеу дағдысын қалыптастыру; әмбебап тригонометриялық алмастыру принципін түсіндіру. Студенттер күрделі интегралдарды қарапайым түрге келтіру, интегралдау әдісін дұрыс таңдауды үйренеді.

Қысқаша мазмұны

Қысқаша мазмұны

Дәрісте квадрат үшмүшелігі бар функцияларды интегралдау әдісі қарастырылады: толық квадрат бөліп алу, айнымалыны алмастыру және интегралды кестелік түрге келтіру. Рационал функцияларды интегралдау үшін дұрыс және бұрыс бөлшектер түсіндіріледі, бұрыс бөлшекті бөлу арқылы дұрыс бөлшекке келтіру ережесі беріледі, ал дұрыс бөлшектер қарапайым бөлшектерге жіктеліп интегралданады. Иррационал функцияларды интегралдау үшін арнайы алмастырулар (мысалы, $t = \sqrt[n]{x}$) қолданылады. Квадрат үшмүшеліктің дискриминанты теріс болғанда интегралдар арктангенс функциясына келтіріледі. Сонымен бірге реккуренттік формула көмегімен жоғары дәрежелі бөлшектердің интегралын есептеу әдісі көрсетіледі. Тригонометриялық функцияларды интегралдауда әмбебап алмастыру $t = \tan x/2$қолданылып, барлық тригонометриялық интегралдар рационал функциялардың интегралдарына келтірілетіндігі дәлелденеді.

Негізгі сұрақтар

Негізгі сұрақтар

1. Квадрат үшмүшелігі бар функцияларды интегралдау әдістері
2. Толық квадрат бөліп алу тәсілі
3. Рационал функцияларды интегралдау:
   – бұрыс бөлшек және дұрыс бөлшек ұғымдары
   – бұрыс бөлшекті көпмүшеге бөлу
   – дұрыс бөлшектерді қарапайым бөлшектерге жіктеу
4. Қарапайым бөлшектерге жіктеу теоремасы
5. Иррационал функцияларды интегралдау әдістері
6. Тригонометриялық алмастырулар
7. Квадрат үшмүшелігі бар иррационал функцияларды интегралдау
8. Дискриминант теріс болған жағдайда интегралды арктангенске келтіру
9. Реккуренттік формула арқылы интегралдау
10. Әмбебап тригонометриялық алмастыру: $t = \tan\frac{x}{2}$
11. Барлық тригонометриялық интегралдардың рационал түрге келтірілуі
12. Интегралдық әдістерді таңдау принциптері

Квадрат үшмүшелігі бар функцияларды интегралдау

Квадрат үшмүшелігі бар функцияларды интегралдау.
Мына төмендегі интегралдарды табу әдісін қарастырайық

$$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx$$

және

$$\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx\,.$$

1) ax^2+bx+c квадрат үшмүшелігіндегі a коэффициентін жақша алдына шығарып, одан толық квадратты бөліп аламыз;

2) интегралға $x+\frac{b}{2a}=t$, $dx=dt$ алмастыруын енгіземіз;

3) Оны екі интегралдың қосындысы етіп жазамыз. Сонда екі интегралымыз да кестелік интегралға келеді.

1-мысал

1- мысал. $\int \frac{x+3}{x^2-2x-8}dx = \int \frac{x+3}{x^2-2x+1-8-1}dx = \int \frac{x+3}{(x-1)^2-9}dx = \int \frac{t+1+3}{t^2-9}dt =$

$$= \int \frac{tdt}{t^2-9} + 4\int \frac{dt}{t^2-9} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2-9)}{t^2-9} - \quad 4\int \frac{dt}{3^2-t^2} = \left|t^2-9=u\right| = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} - 4\frac{1}{2\cdot 3}ln\left|\frac{3+t}{3-t}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}ln|u| - \frac{2}{3}ln\left|\frac{3+t}{3-t}\right| + C =$$

$$\left|\begin{matrix} u = t^2-9 = (x-1)^2-9 = x^2-2x-8 \\ t = x-1 \end{matrix}\right| = \frac{1}{2}ln\left|x^2-2x-8\right| - \frac{2}{3}ln\left|\frac{x+2}{4-x}\right| + C\ .$$

Рационал функцияларды интегралдау

Рационал функцияларды интегралдау. Рационал бөлшекті интегралдау деп, $\int R(x)dx$ интегралын табуды айтады. Мұндағы $R(x)-$дұрыс рационал бөлшек, яғни $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ $=\frac{A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots+A_nx^n}{B_0+B_1x+B_2x^2+\ldots+B_mx^m}$. Егер $n<m$ болса, $R(x)-$дұрыс бөлшек деп, ал $n\geq m$ болса бұрыс бөлшек деп аталады. Бұрыс бөлшекті интегралдау үшін алдымен алымын бөліміне бөлу арқылы оны көпмүшелік пен дұрыс бөлшектің қосындысына жіктейміз. Мысалы, $\frac{x^4-4x^3+2x^2-1}{x^2-x+1}=x^2-3x-2+\frac{x+1}{x^2-x+1}$. Одан әрі қарай тек дұрыс рационал бөлшектерді интегралдауды қарастырамыз.

Қарапайым бөлшектерге жіктеу теоремасы

Теорема. Әрбір **дұрыс рационал** бөлшекті мына қарапайым бөлшектердің қосындысы түрінде жазуға болады:

1. $\frac{A}{x-a}$; 2. $\frac{A}{(x-a)^k}$ $(k=2,3,4,\ldots)$; 3. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$; 4. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$; $(k=2,3,4,\ldots)$,

мұндағы $A,\ B$ – нақты коэффициенттер; x^2+px+q үшмүшелігінің нақты түбірлері жоқ (яғни $D=\frac{P^2}{4}-q<0$).

Қарапайым бөлшектерді интегралдау

Қарапайым бөлшектерді интегралдауды қарастырайық.

1. $\int \frac{Adx}{x-a} = A\ln|x-a| + C \cdot$

2. $k > 1$ мәнінде $\int \frac{Adx}{(x-a)^k} = A\int (x-a)^{-k} dx = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C$.

3. $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$ интегралдау әдісі жоғарыда қарастырылған.

4. $\int \frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx$, мұндағы $k>1$ және бөліміндегі квадрат үшмүшеліктің дискриминанты $D = p^2 - 4q < 0$. Квадрат үшмүшеліктен толық квадрат бөліп алып

Қарапайым бөлшектерді интегралдау

$x+\frac{p}{2}=t$, $dx=dt$, алмастыруын жасаймыз. Сонда $\int\frac{A_1t+B_1}{(t^2+m^2)^k}dt$ интегралын аламыз және оны екі интегралдардың қосындысы түрінде жазамыз. Бірінші интерал t -ны дифференциал астына енгізу арқылы интегралданады:

$$\int\frac{t}{(t^2+m^2)^k}dt=\frac{1}{2}\int(t^2+m^2)^{-k}d(t^2+m^2)=\frac{1}{2}\frac{(t^2+m^2)^{-k+1}}{-k+1}+C=\frac{(x^2+px+q)^{-k+1}}{-k+1}+C.$$

Ал екінші интегралды $I_k=\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^k}$ деп белгілеп, төменгідей есептейміз:

$$I_k=\frac{1}{m^2}\left(\frac{2k-3}{2k-2}I_{k-1}+\frac{t}{2(k-1)\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}\right)$$

Реккуренттік формула

Бұл формуланы ***реккуренттік формула*** деп атайды. Реккуренттік формула арқылы I_2 –ні $I_1 = \int \frac{dt}{t^2 + m^2} = \frac{1}{m} arctg \frac{t}{m} + C$ арқылы, ал I_3 –ті I_2 –арқылы таба отырып, ең соңында I_k – ны I_{k-1} арқылы табамыз.

2- мысал. $\int \frac{dx}{\left(x^2 + 1\right)^2}$ табу керек. $I_2 = \int \frac{dx}{\left(x^2 + 1\right)^2}$ осыдан $k = 2, m = 1$.

$I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + 1} = arctgx + C$, $I_2 = \frac{1}{2} arctgx + \frac{x}{2\left(x^2 - 1\right)} + C$. Сонымен $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ бөлшегінде $n < m$ болсын. Әрбір $Q(x)$ көпмүшелігін бірінші және екінші дәрежелі көпмүшеліктердің көбейтіндісіне жіктеп жазуға болады:

$$Q(x) = (x - a)^k \cdot (x - b)^l \cdot \ldots \cdot (x^2 + px + q)^t \cdot (x^2 + ux + v)^s,$$

мұндағы $k, l, t, s, \ldots$ – бүтін сандар. Сонда дұрыс бөлшек элементар бөлшектерге төмендегідей жіктелінеді :

Реккуренттік формула

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{B_1}{(x-b)} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \cdots + \frac{B_l}{(x-b)^l} \cdots \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + px + q} + \\ + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \cdots + \frac{M_t x + N_t}{(x^2 + px + q)^t} + \cdots \qquad (13.1)$$

мұндағы $A_1, A_2, \ldots A_k, B_1, B_2, \ldots B_l, M_1, N_1, M_2, N_2, \ldots M_t, N_t, \cdots -$ нақты сандар. Осы сандарды табу үшін (13.1) теңдігінің оң жағын ортақ бөлімге келтіреміз. Содан соң теңдіктегі екі бөлшектің бөлімін алып тастасақ, екі жағында да көпмүшелік шығады. Осы теңдіктен бірдей дәрежелі $x-$тің алдындағы коэффициенттерді теңестіре отырып, алгебралық теңдеулер жүйесін құрамыз. Алынған теңдеулер жүйесінен $A_1, A_2, \ldots A_k, B_1, B_2, \ldots B_l, M_1, N_1, M_2, N_2 \ldots$ коэффициенттерінің мәндерін тауып, оларды (13.1) теңдігіне қоямыз. Осылай рационал бөлшектің жіктеуін табамыз. Осы әдісті ***анықталмаған коэффициенттер әдісі*** дейді.

3-мысал

3-мысал. $\int \frac{x^4 - 2x^3 + 3x + 4}{x^3 + 1} dx$ интегралын есептеу керек. Интеграл астындағы функция бұрыс рационал бөлшек, сондықтан алымын бөліміне бөліп дұрыс бөлшекке айналдырамыз: $\frac{x^4 - 2x^3 + 3x + 4}{x^3 + 1} = x - 2 + \frac{2x + 6}{x^3 + 1} = x - 2 + 2\frac{x + 3}{x^3 + 1}$ Соңғы қосылғышты қарапайым бөлшектерге жіктейміз: $\frac{x + 3}{x^3 + 1} = \frac{x + 3}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 - x + 1}$

Бұдан, $x + 3 = A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x + 1)$ x^2 : $0 = A + B$; x : $1 = -A + B + C$; x^0 : $3 = A + C \Rightarrow A = \frac{2}{3},\ B = -\frac{2}{3},\ C = \frac{7}{3}.$

Демек, $\frac{x + 3}{x^3 + 1} = \frac{2}{3(x + 1)} - \frac{2x - 7}{3(x^2 - x + 1)}$. Сонымен,

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 + 3x + 4}{x^3 + 1} dx = \int \left[x - 2 + \frac{4}{3(x + 1)} - \frac{2}{3} \bullet \frac{2x - 7}{x^2 - x + 1} \right] dx == \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{4}{3} ln|x + 1| -$$

$$-\frac{2}{3}\left[\int \frac{(2x - 1)dx}{x^2 - x + 1} - 6\int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \right] = \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{4}{3} ln|x + 1| - \frac{2}{3} ln\left(x^2 - x + 1\right) + \frac{8}{\sqrt{3}} arctg \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C.$$

Кейбір иррационал функцияларды интегралдау

Кейбір иррационал функцияларды интегралдау. Иррационал функцияларды интегралдауда айнымалыны алмастыру арқылы рационал функцияның интегралына келуге болатын кейбір жағдайларды қарастырамыз. $\int R\left(x, \sqrt[n]{x}\right)dx$ түріндегі интегралдар $t = \sqrt[n]{x}$ алмастыруы арқылы рационал функцияның интегралына келеді.

4-мысал

4- мысал. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}dx$ интегралын табайық. x-тің дәрежесіндегі бөлшектердің ортақ бөлімі $k=4$, олай болса берілген интегралды алу үшін $x=t^4$ ауыстыруын жасаймыз.

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}+1}dx = \left|\begin{matrix} x=t^4 \\ dx=4t^3dt \end{matrix}\right| = \int \frac{t^2\cdot 4t^3}{t^3+1}dt = 4\int \frac{t^5}{t^3+1}dt = 4\int\left(\frac{t^5+t^2}{t^3+1}-\frac{t^2}{t^3+1}\right) = 4\int t^2dt - 4\int \frac{t^2dt}{t^3+1} =$$

$$= \frac{4t^3}{3} - \frac{4}{3}\int \frac{d(t^3+1)}{t^3+1} = \frac{4t^3}{3} - \frac{4}{3}ln\left|t^3+1\right| + C = \left|t=\sqrt[4]{x}\right| = \frac{4\sqrt[4]{x^3}}{3} - \frac{4}{3}ln\left|\sqrt[4]{x^3}+1\right| + C\,.$$

Қарастырылған интеграл $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ түріндегі интегралдың дербес түрі болады.

Мұнда $ad \neq cb$. Осы интегралды $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ алмастыруы арқылы рационал функцияның интегралына келтіруге болады.

Тригонометриялық функцияларды интегралдау

Тригонометриялық функцияларды интегралдау.

Бұл пунктте біз $\int R(\sin x, \cos x)dx$ интегралын табуды қарастырамыз. Берілген интеграл $tg\frac{x}{2} = t$ ***әмбебап алмастыруы*** арқылы рационал функцияның интегралына келтіріледі.

Шынында да

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ x = 2arctgt,\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t)dt$$

, мұндағы $R_1(t)$ - рационал функция.

$2dt$

5-мысал

5- мысал. $\int \frac{dx}{\sin x} = \left| tg\frac{x}{2} = t \right| = \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1+t^2}{}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln\left| tg\frac{x}{2} \right| + C$.

Бұл әдісті көрсетілген кез келген интегралға қолдануға болады, ал $\sin x$ немесе $\cos x$ айнымалыларының дәрежесі бірден жоғары болса қолайсыз үлкен өрнектер шығады. Ондай жағдайларда келесі әдістерді қолдану керек.

1 . $\int \sin^m x \cos^n x dx$ түріндегі интеграл.

а) $m-$ бүтін оң тақ сан болса, интеграл $\int R(\cos x)\sin x dx$ түріне келтіріліп, $\cos x = t$ алмастырылуы жасалынады.

б) $n-$ бүтін оң тақ сан болса, интеграл $\int R(\sin x)\cos x dx$ түріне келтіріліп, $\sin x = t$ алмастырылуы жасалынады.

6-мысал

6- мысал. $\int cos^3 x dx = \int cos^2 x \cdot cox dx = \int (1 - sin^2 x) cos\, x dx = \int (1 - sin^2 x) d\, sin\, x =$

$= \left| sin\, x = t \right| = \int (1 - t^2) dx = t - \frac{t^3}{3} + C = sin\, x - \frac{sin^3 x}{3} + C.$

в) m, n – бүтін теріс емес жұп сан болса, $sin^2 x = \frac{1 - cos\, 2x}{2}$, $cos^2 x = \frac{1 + cos\, 2x}{2}$ формулалары арқылы $sin\, x$ пен $cos\, x$ – тің реттері төмендетіледі.

2. Мына $\int sin\, mx\, cos\, nx dx$, $\int cos\, mx\, cos\, nx dx$, $\int sin\, mx\, sin\, nx dx$, мұндағы m, n – тұрақты сандар, түріндегі интегралды алу үшін тригонометрияның формулаларын:

$$sin\, \alpha\, cos\, \beta = \frac{1}{2}(sin(\alpha + \beta) + sin(\alpha - \beta)),\ cos\, \alpha\, cos\, \beta = \frac{1}{2}(cos(\alpha + \beta) + cos(\alpha - \beta)),$$

$$sin\, \alpha\, sin\, \beta = \frac{1}{2}(cos(\alpha - \beta) - cos(\alpha + \beta))$$

қолдану және көбейтінділерді қосындыға жіктеу арқылы берілген интегралды алу қиынға түспейді.

Өзіңді тексеруге арналған сұрақтар

Өзіңді тексеруге арналған сұрақтар

1. Квадрат үшмүшелігі бар интегралды есептеу үшін толық квадратты қалай бөліп аламыз?
2. Бұрыс бөлшек пен дұрыс бөлшектің айырмашылығы неде?
3. Қарапайым бөлшектерге жіктеу теоремасы қалай тұжырымдалады?
4. Тригонометриялық алмастыру қандай жағдайда қолданылады?
5. $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ түріндегі интегралдарды есептеу үшін қандай алмастыру түрлері қолданылады?
6. Дискриминант теріс болғанда интегралдың нәтижесінде қандай функция пайда болады?
7. Әмбебап алмастыру $t = \tan\frac{x}{2}$ неге "әмбебап" деп аталады?
8. Рационал функцияның интегралын есептеу кезінде алғашқы қадам не?
9. Реккуренттік формулалар қай типтегі интегралдарды есептеуді жеңілдетеді?
10. Иррационал функцияларды интегралдау үшін қандай алмастырулар қолданылады?

Әдебиеттер

Әдебиеттер:
1. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа, 2005. Т.1. Т.2.
2. Индивидуальные задания по высшей м атем атике : учеб, пособие. В 4 ч. под общ. ред. А .П . Рябушко. - 5-е изд. – Минск : Выш. шк., 2009. - 304 с.
3. Электронная библиотека механико-математического факультета МГУ. URL: lib.mexmat.ru.
4. Электронные ресурсы издательства Springer. URL: http://link.springer.com/search?facet-content-type=%22Book%22&showAll=false.
5. Электронные ресурсы издательства Elsevier. URL: http://www.info.sciverse.com/sciencedirect/ books/subjects/mathematics.