№ 10-дәріс

Жоғарғы ретті туындылар мен дифференциалдар.

Лекцияның мақсаты

Бұл дәрістің мақсаты – жоғары ретті туынды ұғымын, оның анықтамасы мен есептеу ережелерін, Лейбниц формуласының қолданылуын түсіндіру; жоғары ретті дифференциалдарды анықтау және олардың формулаларын меңгерту; функцияның жергілікті экстремумын табу үшін Ферма, Ролль, Лагранж, Коши теоремаларының мазмұнын және геометриялық мағынасын терең түсіндіру; Лопиталь ережесін қолдана отырып, әртүрлі анықталмағандық түрлерін (0/0, ∞/∞, 0·∞, ∞–∞, 1^∞, 0^0, ∞^0) есептеу дағдыларын қалыптастыру; шектерді түрлендіру, белгісіздіктерді шешу және жоғары ретті туындылардың аналитикалық қолданылуын үйрету.

Негізгі сұрақтар

Негізгі сұрақтар

1. Жоғарғы ретті туындының анықтамасы және мысалдар
2. n-ретті туындылар үшін қосу, көбейту, көбейтінді, композиция ережелері
3. Лейбниц формуласы
4. Жоғарғы ретті дифференциалдардың анықтамасы
5. Жоғарғы ретті дифференциалдардың негізгі формулалары
6. Дифференциал формасының инвариантсыздығы
7. Жергілікті минимум/максимум анықтамасы
8. Ферма теоремасы (экстремум нүктесінде туынды нөл)
9. Ролль теоремасы
10. Коши теоремасы
11. Лагранж теоремасы және оның геометриялық мағынасы
12. Лопиталь ережесі — 0/0, ∞/∞ анықталмағандықтары
13. Лопиталь ережесінің басқа түрлерге қолданылуы (0·∞, ∞–∞, 1^∞, 0^0, ∞^0)
14. Лопиталь ережесін бірнеше рет қолдану
15. Күрделі анықталмағандықтарды түрлендіру тәсілдері

Қысқаша мазмұны

Қысқаша мазмұны

Бұл дәрісте жоғары ретті туындының анықтамасы беріліп, оның негізгі қасиеттері мен есептеу ережелері қарастырылады. Лейбниц формуласы арқылы туындылардың n-ретті көбейтіндісі есептеледі. Жоғарғы ретті дифференциал ұғымы енгізіліп, олардың формулалары, қасиеттері және инвариантсыздығы түсіндіріледі. Функцияның экстремумын табуда Ферма, Ролль, Коши және Лагранж теоремаларының мағынасы мен геометриялық түсіндірмесі беріледі. Анықталмағандықтарды шешу үшін Лопиталь ережесі толық түрде қарастырылып, 0/0, ∞/∞ түріндегі шектерді есептеу тәсілдері, сондай-ақ ∞–∞, 0·∞, 1^∞ сияқты күрделі белгсіздіктерді шектерді түрлендіру арқылы Лопиталь ережесіне келтіру жолдары көрсетіледі. Мысалдар арқылы ереженің бірнеше рет қолданылуы түсіндіріледі.

Жоғарғы ретті туынды

$y' = f'(x)$ берілген $y = f(x)$ функциясының бірінші немесе бірінші ретті туындысы, ал функцияның өзі нөлінші ретті туынды деп аталады.

Анықтама. Функцияның k–ші ретті туындысы деп оның $(k\text{-}1)$-ші туындысының туындысын айтады $f^{(k)}(x) = \left(f^{k-1}(x)\right)'$, $k = 1,2,3,\ldots$, егер олар бар болса, онда $f(x)$ функциясы k-рет дифференциалданатын функция деп аталады.

Мысал. $y = a^x$ функциясы берілген. Бірінші туындысы $f'(x) = a^x \cdot \ln a$, екінші туындысы $f''(x) = (f'(x))' = (a^x \cdot \ln x)' = a^x \cdot (\ln a)^2$, үшінші туындысы $f'''(x) = (f''(x))' = (a^x \cdot (\ln a)^2)' = a^x \cdot (\ln a)^3$. Демек, $f^{(k)}(x) = a^x \cdot (\ln a)^k$, $k = 0,1,2,\cdots$. Егер $y = f(x)$ және $y = g(x)$ функциялары k–рет дифференциалданатын болса, онда ($\mathrm{k} = 1,2,3,\cdots$), мына ережелер орынды: $(f+g)^{(k)} = f^{(k)} + g^{(k)}$, $(f + C)^{(k)} = f^{(k)}$.

Лейбниц формуласы

2. Лейбниц формуласы:

$$(f\cdot g)^{(k)}=f^{(k)}g(x)+kf^{(k-1)}(x)g'(x)+\frac{k(k-1)}{2}f^{(k-2)}(x)\cdot g''(x)+$$

$$+\ldots=\sum_{m=0}^{k}\frac{k!}{m!\cdot(k-m)!}f^{(k-m)}(x)\cdot g^{(m)}(x);\qquad (Cf)^{(k)}=Cf^{(k)}.$$

Айталық $f(x)$ функциясы k –рет дифференциалданатын болсын.

Жоғарғы ретті дифференциалдар

Анықтама. Функцияның k–ші дифференциалы деп оның $(k-1)$–ші ретті дифференциалының дифференциалын айтады: $d^k f = d(d^{k-1} f)$.

Дифференциалды есептеу формулаларын келтірейік:

$df = f'(x)dx$,

$d^2 f = d(df) = (f'(x)dx)'dx = f''(x)(dx)^2$,

$d^3 f = d(d^2 f) = (f''(x)(dx)^2)'dx = f'''(x)(dx)^3$,

… … … … … … … … … … … … … … … … …

$d^k f = f^{(k)}(x)(dx)^k$. k–шы ретті дифференциалдар үшін мына ережелер орынды:

1) $d^k(f+g) = d^k f + d^k g$, $d^k(f+C) = d^k f$.

2) $d^k(f \cdot g) = \sum_{m=0}^{k} \frac{k!}{m!\cdot(k-m)!} d^{k-m} f \cdot d^m g$, $d^k(C \cdot f) = C d^k f$.

Ескерту: Жоғарғы ретті $(k>1)$ дифференциал формасы инвариантты емес.

Дифференциалдық есептеулердің негізгі теоремалары

Дифференциалдық есептеулердің негізгі теоремалары

Анықтама. Егер x_0 нүктесінің бір маңайында $f(x) \geq f(x_0)$ $(f(x) \leq f(x_0))$ теңсіздігі орындалса, онда x_0 нүктесін $f(x)$ функциясының жергілікті минимум (максимум) нүктесі деп атайды.

Жергілікті минимум және жергілікті максимум нүктелері жергілікті экстремум нүктелері деп аталады. Ал осы нүктелердегі функцияның мәні функцияның экстремумы деп аталады. $[a,b]$ кесіндісінде анықталған функцияның тек қана бір ең үлкен және ең кіші мәндері болады, ал максимумдар және минимумдер бірнеше болуы мүмкін. Функцияның кейбір максимумдары оның минимумдарынан кіші болуы да мүмкін.

Ферма және Ролль теоремалары

Ферма теоремасы. Егер $y = f(x)$ функциясы (a,b) интервалында дифференциалданатын болса және $x_0 \in (a,b)$ нүктесінде ең үлкен немесе ең кіші мәнін қабылдайтын болса, онда функцияның туындысы бұл нүктеде нөлге тең, яғни $f'(x_0) = 0$.

Геометриялық мағынасы: функцияның максимум және минимум нүктелерінде жүргізілген жанама Ox өсіне параллель болады.

Ролль теоремасы. Егер $y = f(x)$ функциясы: $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз болса, (a,b) интервалында дифференциалданатын болса және $f(a) = f(b)$ болса, онда ең болмағанда бір $c \in (a,b)$ нүктесі табылып, $f'(c) = 0$ болады.

Геометриялық мағынасы: егер теорема шарттары толығымен орындалса, онда $[a,b]$ кесіндісінде жататын ең болмағанда бір c нүктесі табылып, сол нүктеде жүргізілген жанама Ox өсіне параллель болады.

Коши теоремасы

Коши теоремасы. Егер $y = f(x)$ және $y = g(x)$ функциялары $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз болса, (a,b) интервалында дифференциалданатын болса және $g'(x) \neq 0 \quad \forall$ $x \in (a,b)$, онда ең болмағанда бір $c \in (a,b)$ нүктесі табылып $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ теңдігі орындалады.

Лагранж теоремасы

Лагранж теоремасы. Егер $y = f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз болса, (a,b) интервалында дифференциалданатын болса онда (a,b) интервалында жататын c нүктесі табылып, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \Leftrightarrow f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$ теңдігі орындалады.

Геометриялық мағынасы: мына қатынас $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ $[a,b]$ кесіндісінде $y = f(x)$ функциясының графигінің шеткі нүктелерін қосатын хорданың Ox өсінің оң бағытымен жасайтын бұрыштың тангесіне тең, ал $f'(c)$ c нүктесіне жүргізілген жанаманың Ox өсінің оң бағытымен жасайтын бұрышының тангенісіне тең. Лагранж теоремасы бойынша $c \in (a,b)$ нүктесінде олар өзара тең болады, яғни қиюшы мен жанама параллель болады.

Лопиталь ережесі

Лопиталь ережесі. Бұл ереже $\left(\frac{0}{0}\right)$ немесе $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ анықталмағандықтарын есептеуге мүмкіндік береді.

Теорема. Айталық, $x=a$ нүктесінің маңайында $f(x)$ және $g(x)$ функциялары анықталған және дифференциалданатын болсын (нүктенің өзінде бұл шарттар орындалмауы да мүмкін) және $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, $g(x)\neq 0$, $g'(x)\neq 0$. Егер $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ шегі бар болса, онда $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ шегі бар болады және мына теңдік орындалады:

$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. Осы сияқты тұжырымдар $x\to+\infty$, $x\to-\infty$, $x\to\infty$, $x\to a-$, $x\to a+$ жағдайларда да орынды.

Лопиталь ережесін қолдану

1-мысал. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin ax)'}{(\sin bx)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\cos ax}{b\cos bx}=\dfrac{a}{b}$;

2-мысал. Лопиталь ережесін бірнеше рет қолдануға да болады:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-e^{-x}-2x)'}{(x-\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)==\lim_{x\to 0}\frac{(e^x+e^{-x}-2)'}{(1-\cos x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-e^{-x})'}{(\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=\frac{1+1}{1}=2$$

Анықталмағандықтарды түрлендіру

Лопиталь ережесін анықталмағандықтардың мына түрлеріне де қолдануға болады $(0\cdot\infty)$, $(\infty-\infty)$, (1^{∞}), (0^{0}), (∞^{0}). Ол үшін оларды $\left(\frac{0}{0}\right)$ немесе $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ түрлеріне келтіру керек.

1. Егер $y=f(x)\cdot g(x)$ көбейтіндісінде $f(x)-$ш.а., ал $g(x)-$ш.ү. шамалар болса, онда оларды төмендегідей түрлендіріп, $y=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ немесе $y=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ содан соң Лопиталь ережесін қолданады.

Анықталмағандықтарды түрлендіру

3-мысал. $\lim\limits_{x\to 0+} x\cdot \ln x = (0\cdot\infty) = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0+} (-x) = 0.$

2. Екі ш.ү. функциялар айырмасы $y = f(x) - g(x)$, яғни $(\infty - \infty)$ анықталмағандығы былай түрлендіріледі $y = \dfrac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \dfrac{1}{\frac{1}{g(x)}} = \dfrac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{g(x)}} = \left(\dfrac{0}{0}\right),$ бұл өрнекке Лопиталь ережесі қолданылады.

4-мысал.

$$\lim_{x\to 0}\left(ctgx - \frac{1}{x}\right) = (\infty - \infty) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{(x\cos x - \sin x)'}{(x\sin x)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{\sin x + x\cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{(-x\sin x)'}{(\sin x + x\cos x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x - x\cos x}{\cos x + \cos x - x\sin x} = \frac{0}{2} = 0.$$

Өзіңді тексеруге арналған сұрақтар

Өзіңді тексеруге арналған сұрақтар

1. Жоғарғы ретті туынды дегеніміз не?
2. Лейбниц формуласы қалай тұжырымдалады?
3. Жоғарғы ретті дифференциалдың анықтамасы қандай?
4. Неліктен жоғары ретті дифференциал формасы инвариантты емес?
5. Ферма теоремасы нені тұжырымдайды?
6. Ролль теоремасының шарттары және қорытындысы қандай?
7. Коши теоремасы қандай жағдайда қолданылады?
8. Лагранж теоремасының геометриялық мағынасы қандай?
9. Лопиталь ережесі қандай жағдайларда қолданылады?
10. $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^{∞} түріндегі анықталмағандықтарды қалай Лопитальға келтіреміз?

Әдебиеттер

Әдебиеттер: негізгі, қосымша
1. Махмеджанов Н., Махмеджанова Р.Н. Жоғары математикадағы есептерінің жинағы. Оқу құралы – Алматы: Дәуір, – 2008. – 392 стр
2. Н. Махмеджанов. Жоғарғы математикадан тапсырмалар жинағы. Оқу құралы – Алматы: Қазақ университеті, 2014
3. Қасымов, Қ.Ә.. Жоғарғы математика курсы. – Алматы, 2006
4. Е.Ж. Айдос Жоғары математика. Оқу құралы. – Алматы: Уль-Тек-Китап, 2003.
5. Қабдықайырұлы Құрмет және т.б.. Жоғары математика.- Алматы, 2002
Интернет-ресурсы
6. http://elibrary.kaznu.kz/ru
7. MOOC/видеолекции
8. http://open.kaznu.kz/courses/course-v1:KazNU+Math101+2019-2020_C1/about