№ 3-дәріс

# Вектор туралы түсінік. Кеңістіктердегі тікбұрышты және полярлық координаталар жүйесі. Вектордың осьтерге проекциясы. Сызықтық кеңістік. Сызықтық кеңістіктің өлшемі және негізі.

## Дәрістің мақсаты

Студенттерге вектор ұғымын, оның қасиеттерін, координаталық жүйелердегі берілуін, векторларға қолданылатын амалдарды, сызықтық тәуелділік пен базис ұғымдарын меңгерту. Кеңістіктегі тікбұрышты координаталар жүйесі, вектордың проекциялары, бағыттаушы косинустар, скалярлық көбейтінді және координаталар арқылы векторлық амалдарды орындауды үйрету.

# Негізгі сұрақтар

**Негізгі сұрақтар**

1. Вектор, оның басы мен ұшы, модулі, нөлдік және бірлік векторлар.
2. Коллинеар және компланар векторлар, тең векторлар.
3. Векторларға қолданылатын амалдар: қосу, азайту, санға көбейту.
4. Сызықтық тәуелділік және тәуелсіздік, базис және координаталар.
5. Кеңістіктегі тікбұрышты координаталар жүйесі, орт векторлар.
6. Векторды координаталық өстер бойынша жіктеу.
7. Вектордың модулі және бағыттаушы косинустар.
8. Нүктенің координатасы және радиус-вектор.
9. Берілген екі нүктенің координаталары бойынша векторды табу.
10. Кесіндіні берілген қатынаста бөлу формулалары.
11. Векторлардың скалярлық көбейтіндісі, оның қасиеттері.
12. Скалярлық көбейтіндіні координаталар арқылы есептеу.

# Қысқаша мазмұны

**Қысқаша мазмұны**

Вектор – бағыты мен ұзындығы бар бағытталған кесінді. Вектордың басы мен ұшы, модулі, қарама-қарсы, нөлдік және бірлік векторлар анықталады. Коллинеар және компланар векторлардың қасиеттері беріледі.

Векторларға қолданылатын амалдар — қосу, азайту және санға көбейту — параллелограмм және үшбұрыш әдістері арқылы түсіндіріледі. Сызықтық тәуелділік пен тәуелсіздік ұғымдары енгізіліп, базис және координаталық жіктеу анықталады. Жазықтықтағы (2D) және кеңістіктегі (3D) базистік векторлар және олардың көмегімен кез келген векторды координаталар арқылы жазу қарастырылады.

Кеңістіктегі тікбұрышты декарттық координаталар жүйесінде векторды i, j, k орт векторлар арқылы жіктеу, вектордың модулі және бағыттаушы косинустар формулалары келтіріледі. Нүктенің координатасы, радиус-вектор және екі нүкте арқылы вектор координатасын табу қарастырылады. Кесіндіні берілген қатынаста бөлу формуласы мен кесіндінің ортасын табу ережесі түсіндіріледі.

Соңында екі вектордың скалярлық көбейтіндісі, оның геометриялық (φ бұрышы арқылы) және аналитикалық (координаталар арқылы) анықтамалары беріледі. Скалярлық көбейтіндінің қолданылуы: векторлардың арасындағы бұрышты табу, ортогоналдық шарты, проекция ұзындығын есептеу.

# Вектор, оның басы мен ұшы, модулі

***Вектор*** деп бағытталған кесіндіні айтады, яғни кесіндінің белгілі бір ұзындығы және бағыты болады. Егер *A* – вектордың басы, ал *B* –вектордың ұшы болса, онда вектор $\overline{AB}$ немесе $\bar{a}$ символымен белгіленеді. $\overline{BA}$ векторы $\overline{AB}$ векторына ***қарама-қарсы вектор*** деп аталады (оның басы *B* нүктесінде, ал ұшы *A* нүктесінде орналасқан). $\bar{a}$ векторына қарама-қарсы векторды $-\bar{a}$ деп белгілейді. $\bar{a}$ векторының ***ұзындығы*** немесе ***модулі*** деп $\overline{AB}$ кесіндісінің ұзындығын айтады және оны $\left|\overline{AB}\right|$ немесе $\left|\bar{a}\right|$ деп белгілейді. Ұзындығы нөлге тең векторды ***нөлдік вектор*** деп атайды және ол $\bar{0}$ деп белгіленеді. Нөлдік вектордың бағыты болмайды.

Ұзындығы бірге тең векторды ***бірлік вектор*** деп атайды және оны $\bar{e}$ деп белгілейді. Егер бірлік вектордың бағыты $\bar{a}$ векторының бағытымен сәйкес келсе, онда ол $\bar{a}$ векторының ***орты*** деп аталады және $\overset{-0}{a}$ деп белгіленеді.

# Коллинеар және компланар векторлар, тең векторлар

Параллель түзулерде немесе бір түзудің бойында жататын векторлар ***коллинеар векторлар*** деп аталады және $\bar{a} \,||\, \bar{b}$ деп белгіленеді. Коллинеар векторлар бағыттас болуы да, қарама-қарсы бағытта да болуы мүмкін.

Егер екі $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторлары коллинеар болып, бағыттас және ұзындықтары бірдей болса, онда оларды ***тең векторлар*** ( $\bar{a} = \bar{b}$ ) дейді. Тең векторлар еркін векторлар деп те аталады. Бұл векторлардың басталған нүктесін кеңістіктегі кез келген нүктеге көшіруге болады. Аналитикалық геометрияда еркін (бос) векторлар қарастырылады.

Егер кеңістіктегі үш вектор бір жазықтықта немесе параллель жазықтықтарда жатса, онда олар ***компланар векторлар*** деп аталады.

# Векторларға қолданылатын сызықтық амалдар

**Векторларға қолданылатын сызықтық амалдар**

Сызықтық амалдар деп, векторларды қосу және алу, векторды санға көбейту амалдарын айтады.

Екі вектордың қосындысын екі жолмен табуға болады: бірі параллелограмм әдісі, екіншісі үшбұрыштар әдісі.

***Параллелограмм әдісі.*** $\bar{a}$ және $\bar{b}$ ***векторларының қосындысы*** $\vec{a}+\vec{b}$ деп, $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларының ортақ бас нүктесінен шығатын, параллелограммның диагоналіне сәйкес келетін векторды айтады.

# Векторларға қолданылатын сызықтық амалдар

***Үшбұрыштар әдісі.*** Егер $\bar{b}$ векторының басы $\bar{a}$ векторының ұшына орналасса, онда $\bar{a}$ және $\bar{b}$ ***векторларының қосындысы*** $\vec{a}+\vec{b}$ деп, $\bar{a}$ векторының басы мен $\bar{b}$ векторының ұшын қосатын векторды айтады.

Бір нүктеден шығатын $\bar{a}$ және $\bar{b}$ ***векторларының айырымы*** $\vec{a}-\vec{b}$ деп $\bar{b}$ векторының ұшын $\bar{a}$ векторының ұшымен қосатын векторды айтады.

$\bar{a}$ векторының $\lambda$ санына көбейтіндісі деп ұзындығы $\left|\lambda\right|\left|\bar{a}\right|$ -ға тең, $\bar{a}$ векторына коллинеар, егер $\lambda>0$ болса $\bar{a}$ векторымен бағыттас және $\lambda<0$ болса, $\bar{a}$ векторына қарама-қарсы бағытталған $\bar{b}=\lambda\bar{a}$ векторын айтады. $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларының ***коллинеарлығының қажетті және жеткілікті шарты:*** $\bar{a}=\lambda\bar{b}\ (\lambda\neq 0)$

# Векторлардың сызықтық тәуелділігі. Базис

**Векторлардың сызықтық тәуелділігі. Базис**

$\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}$ векторлар жүйесі берілсін.

$\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}$ векторлар жүйесі үшін бәрі бірдей нөлге тең емес және

$$\lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + \ldots + \lambda_n \overline{a_n} = 0 \qquad (3.1)$$

теңдігін қанағаттандыратын $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ сандары табылса, онда $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}$ векторларын ***сызықтық тәуелді векторлар*** деп атайды. Ал егер $(3.1)$ теңдік тек $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ сандарының барлығы бірдей нөлге тең болғанда ғана орындалса, онда $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}$ векторлар жүйесі ***сызықтық тәуелсіз*** деп аталады.

# Векторлардың сызықтық тәуелділігі. Базис

Егер $\bar{b} = \lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + \ldots + \lambda_n \overline{a_n}$ теңдігі орындалатын $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ сандары табылса, онда $\bar{b}$ векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}$ векторларының ***сызықтық комбинациясы*** деп аталады.

***Теорема.*** *Екі вектор сызықтық тәуелді болуы үшін олардың өзара коллинеар болуы қажетті және жеткілікті*.

Бұл теоремадан кез келген коллинеар емес ***екі вектор сызықтық тәуелсіз*** болады деген қорытынды шығады.

***Теорема.*** *Үш вектор сызықтық тәуелді болуы үшін олардың компланар болуы қажетті және жеткілікті.*

Бұл теоремадан кез келген компланар емес үш ***вектор сызықтық тәуелсіз векторлар*** жүйесін құрайды деген қорытынды шығады.

# Векторлардың сызықтық тәуелділігі. Базис

Егер жазықтықта кез келген $\bar{a}$ векторы үшін $x_1, x_2$ нақты сандары табылып, мына теңдік $\bar{a} = x_1\bar{e_1} + x_2\bar{e_2}$ орындалса, онда белгілі ретпен алынған $\bar{e_1}, \bar{e_2}$ сызықтық тәуелсіз векторлар жұбы ***жазықтықтағы базис*** деп аталады. Мұндағы $x_1, x_2$ сандары $\bar{a}$ векторының $\bar{e_1}, \bar{e_2}$ базисіндегі координаттары деп аталады да былай белгіленеді: $\bar{a}(x_1, x_2)$. Егер кеңістікте кез келген $\bar{b}$ векторы үшін $x_1, x_2, x_3$ нақты сандары табылып, мына теңдік $\bar{b} = x_1\bar{e_1} + x_2\bar{e_2} + x_3\bar{e_3}$ орындалса, онда белгілі ретпен алынған сызықтық тәуелсіз $\bar{e_1}, \bar{e_2}, \bar{e_3}$ векторлар үштігін ***кеңістіктегі базис*** деп атайды. Мұндағы $x_1, x_2, x_3$ сандары $\bar{b}$ векторының $\bar{e_1}, \bar{e_2}, \bar{e_3}$ базисіндегі координаттары деп аталады да былай белгіленеді: $\bar{b}(x_1, x_2, x_3)$.

Базисті құраушы векторлар ***базистік векторлар*** деп аталады. Осы анықтамалар мен теоремалардан кез келген коллинеар емес екі вектор жазықтықта, ал кез келген компланар емес үш вектор кеңістікте базистік векторлар жүйесі болады деген қорытынды шығады.

# Векторды координат өстердің орттары арқылы жіктеу

**Векторды координат өстердің орттары арқылы жіктеу. Вектордың модулі.** Кеңістіктегі тік бұрышты декарттық $Oxyz$ координаталар жүйесін қарастырайық. *Ox, Oy, Oz* координат өстерінің бойында жатқан бірлік (**орт**) векторларды сәйкесінше $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ деп белгілейік. Сонда реттелген үштік $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ кеңістікте базистік векторлар жүйесін құрайды. Мұндай, базистік векторлар жүйесін **ортогональ** базистік жүйе (**базис**) деп атайды $\left(\bar{i} \perp \bar{j} \perp \bar{k}\right)$. $\overline{a} = \overline{OM} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, себебі үш вектордың қосындысы.

Бұл формула $\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ ***вектордың координат өстерінің орттары арқылы жіктелген*** түрі деп аталады немесе қысқаша $\bar{a} = (x, y, z)$ деп жазады.

Екінші жағынан $\left|\overline{OM}\right|^2 = \left|\overline{OM_1}\right|^2 + \left|\overline{OM_2}\right|^2 + \left|\overline{OM_3}\right|^2 = x^2 + y^2 + z^2$, Осыдан $\overline{OM} = \bar{a}$ болғандықтан $\left|\bar{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ***- вектордың модулі (ұзындығы).***

# Вектордың модулі және бағыттаушы косинустар

***1-мысал.*** Егер $\vec{a}=(1,2,3)$, онда $|\vec{a}|=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$ Егер $\bar{a}$ векторы *Ox, Oy, Oz* өстерімен сәйкесінше $\alpha,\beta,\gamma$ бұрыштарын құрса, онда

$x=|\bar{a}|\cos\alpha,\quad y=|\bar{a}|\cos\beta,\quad z=|\bar{a}|\cos\gamma$, осыдан $\cos\alpha=\frac{x}{|\bar{a}|},\ \cos\beta=\frac{y}{|\bar{a}|},\quad \cos\gamma=\frac{z}{|\bar{a}|}$ болады.

Мұндағы $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ сандары $\bar{a}$ ***векторының бағыттаушы косинустары*** деп аталады. Алдыңғы өрнекті вектордың модулінің формуласына қойып,

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ теңдігін аламыз. $\bar{e}$ бірлік векторының координаттары $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ екенін оңай байқауға болады . Сонымен, $\bar{e}=(\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma)$.

***2-мысал.*** $\vec{a}=(1,2,2)$, векторы үшін $\vec{a}^0=\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$

# Координаттарымен берілген векторларға амалдар қолдану

**Координаттарымен берілген векторларға амалдар қолдану**

$\bar{a}=(x_1,y_1,z_1)=x_1\bar{i}+y_1\bar{j}+z_1\bar{k}$, $\bar{b}=(x_2,y_2,z_2)=x_2\bar{i}+y_2\bar{j}+z_2\bar{k}$ болса,

$1.\ \bar{a}\pm\bar{b}=(x_1\pm x_2;y_1\pm y_2;z_1\pm z_2)$

$2.\ \lambda\bar{a}=(\lambda x_1;\lambda y_1;\lambda z_1)$

**Векторлардың теңдігі**

$x_1=x_2,\ y_1=y_2,\ z_1=z_2$ болғанда ғана $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторлары тең болады, яғни

$\bar{a}=\bar{b}\ \Leftrightarrow\ x_1=x_2,\ y_1=y_2,\ z_1=z_2$

**Векторлардың коллинеарлығы.** $\bar{a}\ ||\ \bar{b}$ болғандықтан оны $\bar{a}=\lambda\bar{b}$ деп жазуға болады, мұндағы

$\lambda$ - қайсыбір сан. Осыдан $(x_1,y_1,z_1)=\lambda(x_2,y_2,z_2)\ \Rightarrow\ \frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$ -екі вектордың

коллинеарлығының белгісі.

# Нүктенің координатасы және радиус-вектор

**Нүктенің координатасы.** Кеңістікте тік бұрышты декарттық $Oxyz$ координаттар жүйесі берілсін. Кез келген ***M нүктесінің координаты*** деп, $\overline{OM}$ векторының координатын айтады. $\overline{OM}$ векторы $M$ нүктесінің радиус-векторы деп аталады және $\overline{OM} = \bar{r}$ деп белгіленеді. Сонымен, $\bar{r} = (x; y; z)$ немесе $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$. $M$ нүктесінің координатасы $M(x; y; z)$ деп жазылады.

**Вектордың координатасы.** Егер $A(x_1; y_1; z_1)$ және $B(x_2; y_2; z_2)$ нүктелерінің координаттары берілсе, онда $\bar{a} = \overline{AB}$ ***векторының координатасы*** былай есептелінеді:

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

***3-мысал.*** $A(1,-1,1)$, $B(2,3,4)$ берілсе, онда $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ базисінде $\overline{AB} = \vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$,

$$\vec{AB} = \{1;4;3\}.$$

# Кесіндіні берілген қатынаста бөлу

**Кесіндіні берілген қатынаста бөлу.** $A(x_1;y_1;z_1)$ және $B(x_2;y_2;z_2)$ нүктелері арқылы өтетін кесінді берілсін. Осы кесіндіні $\lambda>0$ қатынасындай етіп бөлетін $N(x;y;z)$ нүктесінің координаттары: $x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$, $y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$, $z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$ - ***кесіндіні берілген қатынаста бөлу формулаларымен*** анықталады. Егер $\lambda=1$ болса, яғни $\overline{AN}=\overline{NB}$ онда

$x=\frac{x_1+x_2}{2}$, $y=\frac{y_1+y_2}{2}$, $z=\frac{z_1+z_2}{2}$ - ***кесіндінің ортасын табу формуласы.***

# Векторлардың скалярлық көбейтіндісі

**Векторлардың скалярлық көбейтіндісі**

***Анықтама.*** Екі $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының ***скалярлық көбейтіндісі*** деп $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi$ санын айтады. Скаляр көбейтінді $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\vec{b}$, $(\vec{a},\vec{b})$ символдармен белгіленеді. Мұндағы $\varphi=(\bar{a},\hat{}\,\bar{b})$ $np_{\bar{в}}\bar{a}=|\bar{a}|\cos\varphi$ ($\varphi=(\bar{a},\hat{}\,\bar{b})$), болғандықтан $\bar{a}\bar{b}=|\bar{b}|np_{\bar{в}}\bar{a}=|\bar{a}|np_{\bar{a}}\bar{в}$ деп жазуға болады.

***4-мысал.*** Егер $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, $(\vec{a},\hat{}\,\vec{b})=\frac{\pi}{3}$, онда $\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot4\cdot\cos\frac{\pi}{6}=6$

***Теорема.*** $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ базисінде $\vec{a}$ векторының координаталары $(x_1,y_1,z_1)$, ал $\vec{b}$ векторының координаталары $(x_2,y_2,z_2)$ болсын. Онда $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

***5-мысал.*** Егер $\vec{a}=(1,2,3)$, $\vec{b}=(4,5,6)$ болса, онда $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot4+2\cdot5+3\cdot6=32$

# Скалярлық көбейтіндінің қолданылуы

***Скалярлық көбейтіндінің қолданылуы***

1. $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ немесе $\cos\varphi = \dfrac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$

2. $\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow \quad x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$

3. $np_{\bar{в}}\bar{a} = \dfrac{\bar{a} \cdot \bar{в}}{|\bar{в}|}$ ( $np_{\bar{a}}\bar{в} = \dfrac{\bar{a} \cdot \bar{в}}{|\bar{a}|}$ ) немесе $np_{\bar{в}}\bar{a} = \dfrac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$

# Өзін-өзі тексеруге арналған сұрақтар

**Өзін-өзі тексеруге арналған сұрақтар**

1. Вектор дегеніміз не? Оның модулі қалай анықталады?
2. Қарама-қарсы және тең векторлар деген не?
3. Коллинеар және компланар векторлар қандай жағдайларда болады?
4. Векторларды қосу қандай әдістермен орындалады?
5. Векторды санға көбейту деген не?
6. Сызықтық тәуелді және тәуелсіз векторлар қалай анықталады?

# Өзін-өзі тексеруге арналған сұрақтар

7. Базис дегеніміз не және вектордың базистегі координатасы қалай табылады?
8. Радиус-вектор дегеніміз не?
9. Екі нүкте арқылы вектордың координатасы қалай есептеледі?
10. Кесіндіні берілген қатынаста бөлу формуласы қалай жазылады?
11. Вектордың скалярлық көбейтіндісі қалай анықталады?
12. Скалярлық көбейтіндінің көмегімен екі вектордың арасындағы бұрышты қалай табуға болады?

# Қолданылған әдебиет тізімі

**Қолданылған әдебиет тізімі:**

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: ФМЛ, 2004.

2. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – Серия: Учебники для вузов. Специальная литература, 2-е издание, стереотипное, Санкт-Петербург: Издательство «Лань», 2009, 512 с.

3. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа, 2005. Т.1. Т.2.

4. Индивидуальные задания по высшей м атем атике : учеб, пособие. В 4 ч. под общ. ред. А .П . Рябушко. - 5-е изд. – Минск : Выш. шк., 2009. - 304 с.