№ 6-дәріс

Екінші ретті сызықтар мен беттер. Екінші ретті теңдеуді зерттеу. Эллипс. Гипербола. Парабола.Кеңістіктегі жазықтық пен түзулер. Жазықтықтың теңдеуі

Лекцияның мақсаты

Бұл дәрістің мақсаты – студенттерді жазықтықтағы және кеңістіктегі екінші ретті сызықтар мен беттердің анықтамаларымен, олардың канондық теңдеулерімен, геометриялық қасиеттерімен, фокус, директриса, эксцентриситет сияқты ұғымдармен таныстыру. Сонымен қатар, екінші ретті теңдеуді түрлендіріп, оны шеңбер, эллипс, гипербола немесе парабола түріне келтіру әдістерін меңгерту. Екінші ретті беттерге (сфера, цилиндр, конус, эллипсоид, гиперболоид, параболоид) арналған канондық теңдеулерді дұрыс қолдануды үйрету.

Негізгі сұрақтар

Негізгі сұрақтар

1. Шеңбердің анықтамасы және оның канондық теңдеуі
2. Эллипс: анықтама, фокустар, үлкен/кіші осьтер, эксцентриситет
3. Гипербола: анықтама, канондық теңдеуі, асимптоталары, директрисалары
4. Парабола: фокус, директриса, канондық теңдеу
5. Екінші ретті қисықтың жалпы теңдеуі және оның классификациясы
6. Теңдеуді канондық түрге келтіру әдісі (толық квадратқа келтіру)
7. Сфераның канондық теңдеуі
8. Цилиндр түрлері және олардың теңдеулері
9. Конустың теңдеуі және бағыттаушысы
10. Айналу беттері және олардың теңдеулері
11. Эллипсоид, гиперболоид (бір және екі қуысты), параболоидтар
12. Екінші ретті беттердің геометриялық ерекшеліктері

Қысқаша мазмұн

Қысқаша мазмұн
Бұл дәрісте жазықтықтағы екінші ретті сызықтар – шеңбер, эллипс, гипербола және парабола – олардың фокустары, директрисалары, жарты остері, эксцентриситеттері және канондық теңдеулері арқылы толық қарастырылады. Екінші ретті жалпы теңдеудің ($Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$) шеңбер, эллипс, гипербола немесе парабола болу жағдайлары көрсетіліп, координаталарды ығыстыру және толық квадратқа келтіру әдісінің көмегімен канондық түрге келтіру тәсілдері талданады. Кеңістіктегі екінші ретті беттер – сфера, цилиндрлер (дөңгелек, эллипстік, гиперболалық, параболалық), конус, айналу беттері, эллипсоид, бір және екі қуысты гиперболоидтар, эллипстік және гиперболалық параболоидтар – олардың канондық теңдеулері және геометриялық сипаттамалары арқылы түсіндіріледі. Сонымен қатар, әр фигураның осьтері, симметриялары және олардың кеңістіктегі орналасуы қарастырылады.

Шеңбер

1. Шеңбер

Анықтама. Центр деп аталатын берілген нүктеден бірдей қашықтықта жататын жазықтықтағы нүктелердің геометриялық орындарын ***шеңбер*** деп атайды.

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2 \qquad (6.1)$$

(6.1) – теңдеуі центрі $C(x_0, y_0)$ нүктесінде жатқан радиусы R-ге тең шеңбердің теңдеуі.

Егер шеңбердің центрі C координаттардың бас нүктесінде жатса, яғни $x_0 = y_0 = 0$ болса, онда (6.1) мына түрге келеді:

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad (6.2)$$

Эллипс

2. Эллипс

Анықтама. Фокустар деп аталатын берілген екі нүктеден қашықтықтарының қосындысы тұрақты шама болатын жазықтықтағы нүктелердің геометриялық орындарын **эллипс** деп атайды.

Анықтама бойынша $F_1M + F_2M = 2a$, мұндағы F_1 және F_2 – фокустар деп аталатын берілген нүктелер, $M(x, y)$ – эллипстің бойындағы кез келген нүкте, $2a$ –тұрақты шама.

Егер $F_1F_2 = 2c$ десек, онда $F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$. Енді осы мәндерді $F_1M + F_2M = 2a$ теңдеуіне қойып, түрлендіріп, ***эллипстің канондық теңдеуін*** аламыз:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (6.3)$$

мұндағы a – эллипстің үлкен жарты өсі, b – оның кіші жарты өсі болады. b – ны табу үшін эллипстің бойынан $M_1(0;b)$ нүктесін аламыз. $F_1M_1 = F_2M_1$ болғандықтан $2F_1M_1 = 2a$ немесе $F_1M_1 = a$ болады. ***Пифагор теоремасы*** бойынша $a^2 = b^2 + c^2$. Осыдан $b^2 = a^2 - c^2$ деп белгілейміз. $\varepsilon = \frac{c}{a}$ қатынасын ***эллипстің эксцентриситет***і деп атайды. $a > c$ болғандықтан $\varepsilon < 1$. $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ ***эллипстің директрисаларының*** теңдеуі. Ол эллипстің сыртында жатады.

Гипербола

3. Гипербола

Анықтама. Фокустар деп аталатын берілген екі нүктеден қашықтықтарының айырмасының абсолюттік шамасы тұрақты ***2a***-ға тең болатын жазықтықтағы нүктелердің геометриялық орындарын **гипербола** деп атайды.

Гиперболаның канондық теңдеуі былай жазылады:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (6.4)$$

Мұндағы $b^2=c^2-a^2$, a – гиперболаның нақты жарты өсі, b – жорамал жарты өсі, $\varepsilon=\frac{c}{a}$ ***гиперболаның эксцентриситеті***, $c>a$ болғандықтан $\varepsilon>1$. Егер гиперболаның $M(x, y)$ нүктесі шексіздікке ұмтылғанда $M(x, y)$ нүктесінен түзуге дейінгі қашықтық нөлге ұмтылса, онда мұндай түзуді ***гиперболаның асиптотасы*** дейді. Гиперболаның асимптоталарының теңдеулері: $y=\frac{b}{a}x$ және $y=-\frac{b}{a}x$, мұндағы a және b – гиперболаның жарты өстері. $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$ ***гиперболаның директрисаларының*** теңдеуі. Гиперболаның директрисалары оның төбелерінің арасында жатады.

Парабола

4. Парабола

Анықтама. Фокус деп аталатын берілген нүктеден және директриса деп аталатын берілген түзуден ара қашықтықтары бірдей болатын жазықтықтағы нүктелердің геометриялық орындарын ***парабола*** дейді.

$$y^2 = 2px \qquad (6.5)$$

мұндағы p – берілген фокус пен директрисаның арасындағы қашықтық. Параболаның директрисасының теңдеуі: $x = -\frac{p}{2}$. $y^2 = 2px$ параболасы Ox өсіне симметриялы орналасады.

Екінші ретті қисықтың жалпы теңдеуі

5. Екінші ретті қисықтың жалпы теңдеуі

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (6.6)$$

Теорема. (6.6) теңдеуі әрқашан не шеңберді (егер $A = C$), не эллипсті (егер $A \cdot C > 0$), не гиперболаны (егер $A \cdot C < 0$), не параболаны (егер $A \cdot C = 0$) анықтайды. Бұл жағдайларда эллипс (шеңбер) нүктеге немесе жорамал эллипске (шеңберге), гипербола қиылысатын түзулердің жұбына, парабола параллель түзулердің жұбына айналуы мүмкін.

1-мысал

1-мысал. $4x^2+9y^2-40x+36y+100=0$ теңдеуін канондық түрге келтіру керек.

$A=4,\ C=9,\ A\cdot C=36>0$ – эллипстің теңдеуі.

$$(4x^2-40x)+(9y^2+36y)+100=0 \Rightarrow 4(x^2-10x+25)-100+9(y^2+4y+4)-36=0$$

$$\Rightarrow 4(x-5)^2+9(y+2)^2=36 \Rightarrow \frac{(x-5)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{4}=1.$$

Осыдан $x-3=X,\ y+2=Y$ деп белгілесек $\frac{X^2}{9}+\frac{Y^2}{4}=1$ – эллипстің канондық теңдеуі,

Бұл жүйенің басы $O'(5,-2)$ нүктесінде орналасқан.

Екінші ретті беттер. Сфера

Екінші ретті беттер

1. Сфера. Берілген нүктеден бірдей қашықтықта орналасқан кеңістіктегі нүктелердің геометриялық орындарын ***сфералық*** немесе ***шар беті*** дейді. Оның канондық теңдеуі:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

мұндағы $C(a,b,c)$ – сфераның центрі. Егер сфераның центрі $O(0,0,0)$ нүктесінде болса, онда оның теңдеуі мына түрде болады: $x^2+y^2+z^2=R^2$

Цилиндр

2. Цилиндр. Цилиндр перпендикулярлық қимасындағы сызықтың түріне қарай дөңгелек, эллипстік, гиперболалық және параболалық цилиндрлер деп төртке бөлінеді. Осыған сәйкес төменгі теңдеулермен анықталады: $x^2 + y^2 = R^2$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $y^2 = 2px$.

Бұл теңдеулер жазықтықта шеңберді, эллипсті, гиперболаны және параболаны кескіндейді, ал кеңістікте цилиндрлердің теңдеулері. Бұл цилиндрлердің жасаушылары Oz өсіне параллель болады.

Конус

3. Конус

Конус деп берілген нүктеден өтетін және бағыттаушы қисықтың бойымен жылжитын жасаушы түзудің үздіксіз қозғалысынан шығатын геометриялық бетті айтады. Оның теңдеуі: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$. Бұл конустың бағыттаушысы $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипс, ал жасаушы түзуі координаталардың бас нүктесінен өтеді. Егер конустың перпендикулярлық қимасы шеңбер болса, онда оның теңдеуі: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ болады; егер $a=b=c$ болса, онда конустың теңдеуі $x^2+y^2-z^2=0$ болады.

Айналу беттері

4. Айналу беттері. Егер кеңістікте бір сызық берілген өсті айналса, оның айналуынан бет пайда болады. Айналушы сызықтың формасына байланысты бет әр түрлі болады. Мысалы, шеңбер өзінің диаметрі бойынша айналса, сфералық бет шығады, ал координаталар басынан өтетін түзу Oz өсін айналса, дөңгелек конус пайда болады. Сызықтың айналатын өсін айналу өсі, ал пайда болған ***бетті айналу беті*** дейді.

Эллипсоидтың теңдеуі

5. Эллипсоидтың теңдеуі: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, мұндағы $a,b,c-$жарты өстер. Бұл үш өсті эллипсодтың теңдеуі болады. $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ эллипсін Oz өсімен айналдырғаннан шыққан бетті ***айналу эллипсоиды*** деп атайды. Оның теңдеуі: $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

Бір қуысты және екі қуысты гиперболоид

***6. Бір қуысты гиперболоид*:** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ гиперболасын Oz өсінен айналдырсақ ***бір қуысты гиперболоид*** деп аталатын айналу беті шығады, оның теңдеуі: $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

7. Екі қуысты гиперболоид: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$

Эллипстік және гиперболалық параболоид

8. Эллипстік параболоид: $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$, мұндағы $p>0,\ q>0$.

9. Гиперболалық параболоид: $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$, мұндағы $p>0,\ q>0$.

Өзіңді тексеруге арналған сұрақтар

Өзіңді тексеруге арналған сұрақтар

1. Шеңбердің анықтамасы қандай? Оның канондық теңдеуі қалай жазылады?
2. Эллипстің фокустары, үлкен және кіші жарты остері қалай анықталады?
3. Эллипстің эксцентриситеті қалай есептеледі және оның мағынасы қандай?
4. Гиперболаның анықтамасы мен канондық теңдеуін жазыңыз.
5. Гиперболаның асимптоталары қалай табылады?
6. Параболаның фокусы мен директрисасы арасындағы байланыс қандай?
7. Екінші ретті жалпы теңдеуді қандай жағдайларда шеңбер, эллипс, гипербола немесе парабола деп атайды?
8. Сфераның теңдеуін жазыңыз. Оның центрі мен радиусын қалай табуға болады?
9. Цилиндрдің қандай түрлері бар? Олардың теңдеулерін жазыңыз.
10. Конустың теңдеуі қай кезде эллипстік немесе гиперболалық болады?
11. Эллипсоид, гиперболоид және параболоидтың канондық теңдеулерін жазыңыз.
12. Берілген екінші ретті теңдеуді канондық түрге келтірудің негізгі қадамдары қандай?

Әдебиеттер

Әдебиеттер:
1. Қасымов, Қ.Ә.. Жоғарғы математика курсы. – Алматы, 2006
2. Е.Ж. Айдос Жоғары математика. Оқу құралы. – Алматы: Уль-Тек-Китап, 2003.
3. Қабдықайырұлы Құрмет және т.б.. Жоғары математика.- Алматы, 2002
4. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа, 2005. Т.1. Т.2.
5. Индивидуальные задания по высшей м атем атике : учеб, пособие. В 4 ч. под общ. ред. А .П . Рябушко. - 5-е изд. – Минск : Выш. шк., 2009. - 304 с.

Интернет-ресурсы
6. http://elibrary.kaznu.kz/ru
7. МООС/видеолекции
8. http://open.kaznu.kz/courses/course-v1:KazNU+Math101+2019-2020_C1/about
9. Электронная библиотека механико-математического факультета МГУ. URL: lib.mexmat.ru.