№ 7-дәріс

Бір айнымалы функция туралы түсінік. Тізбектер мен функциялардың шектері. Функциялардың шектері туралы теоремалар. Функциялардың үздіксіздігі туралы түсініктер. Функцияның үзіліс нүктелері.Екінші ретті қисықтар мен беттер. Екінші ретті қисықтар

Лекцияның мақсаты

Студенттерді бір айнымалы функция ұғымымен, оның берілу тәсілдерімен, негізгі қасиеттерімен, монотондылық, жұп-тақ және периодтылық қасиеттерімен, күрделі және кері функциялармен таныстыру. Сондай-ақ функцияның нүктедегі және ақырсыздықтағы шектері, сол және оң жақ шектері, шексіз аз және шексіз үлкен шамалар, шектер туралы негізгі теоремалар және олардың тізбектерге қолданылуы туралы түсінік беру. Функцияның үздіксіздігі мен үзіліс нүктелерін түсіндіру және мысалдар арқылы бекіту.

Негізгі сұрақтар

Негізгі сұрақтар

- Бір айнымалы функцияның анықтамасы
- Функцияны беру тәсілдері:

– аналитикалық,
– таблицалық,
– графиктік

- Функцияның негізгі қасиеттері:

– шектелгендік
– монотондық
– жұп және тақ функция
– периодты функция

- Күрделі функция және кері функция
- Параметрлік түрде берілген функция
- Функцияның нүктедегі шегі. ε–δ анықтамасы
- Сол жақ және оң жақ шектер, белгіленуі
- Функцияның $+\infty$ және $-\infty$-дегі шектері
- Тізбек шектері және олардың функция шектерімен байланысы
- Шексіз аз және шексіз үлкен функциялар
- Шектер туралы негізгі теоремалар
- Үздіксіз функциялар және үзіліс нүктелері

Қысқаша мазмұн

Қысқаша мазмұн

Бұл дәрісте функция ұғымы X жиынының әрбір x элементіне Y жиынынан белгілі бір y мәнін сәйкестендіру арқылы анықталатыны түсіндіріледі. Функция аналитикалық, таблицалық немесе графиктік түрде берілуі мүмкін. Негізгі қасиеттер: шектелгендік, монотондылық (өспелі және кемімелі функция), жұп және тақ функциялар, периодтылық толық қарастырылады.

Күрделі функция $f(\varphi(x))$ және кері функция $\varphi(y)=f^{-1}(y)$ туралы анықтамалар мен мысалдар беріледі. Параметрлік түрде берілген функциялардың тиімділігі атап өтіледі.

Дәрістің екінші бөлігінде функция шегі ε–δ тілінде анықталады: $x\to a$ кезінде $f(x)\to A$ болуы үшін барлық $\varepsilon>0$ үшін тиісті $\delta>0$ табылуы қажет. Сол жақ және оң жақ шектер, $+\infty$ және $-\infty$ нүктелеріндегі шектер анықтамалары толық енгізілген. Тізбек шектерімен байланыс және шектің бір мәнділігі дәлелдері көрсетіледі.

Шексіз аз және шексіз үлкен шамалар анықталып, олардың арасындағы байланыс берілген. Шектердің негізгі теоремалары (қосу, алу, көбейту, бөлу, композиция) толық түсіндіріледі. Мысалдарда анықталмаған түрлерді ашу әдістері көрсетіледі.

Бір айнымалы функцияның анықтамасы

Анықтама. X және Y бос емес сандар жиындары болсын. Егер X жиынының кез келген x элементіне белгілі бір заңдылықпен Y жиынының бір y элементі сәйкес келетін болса, онда X жиынында $y = f(x)$ ***функциясы*** берілді дейді. Мұндай жағдайда x – ті ***тәуелсіз шама (аргумент),*** ал y – ті ***тәуелді шама*** деп атайды. f әрпі X пен Y жиындарының арасында сәйкестік заңдылықты береді. X жиыны функцияның анықталу облысы, ал Y жиыны функция мәндерінің жиыны деп аталады.

Функцияның үш түрлі жолмен беріледі:

а) Аналитикалық тәсілмен;

б) Таблицалық, яғни мәндер тәсілімен;

в) Графиктік тәсілмен

Функцияның негізгі қасиеттері

Функцияның негізгі қасиеттері

1. Анықтама. Егер X аралығында жатқан барлық x нүктелері үшін $|f(x)| \le M$ теңсіздігі орындалатындай $M > 0$ саны табылса, онда $f(x)$ функциясы X аралығында ***шектелген функция*** деп аталады. Дербес жағдайда, $y = x$ болғанда $|x| \le M$ шарты $x-$ айнымалысының шектеулігін көрсетеді.

2. Аралықта өсетін және кемитін функциялар

Анықтама. $[a,b]$ сегментінде (аралығында) анықталған $f(x)$ функциясы үшін $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$, $x_1 < x_2$ болғанда $f(x_1) < f(x_2)\,(f(x_1) > f(x_2))$ теңсіздігі орындалса, онда $f(x)$ осы аралықта өспелі (кемімелі) ***функция*** деп аталады.

Функция аралықта өспелі немесе кемімелі болса, онда бұл аралық ***монотондық аралық***, ал $f(x)$ функциясы осы аралықта ***монотонды*** деп аталады.

Мысал. $y = x^2$ функциясы $(-\infty,+\infty)$ аралығында монотонды және: $(-\infty;0)$ интервалында кемімелі, ал $(0;+\infty)$ интервалында өспелі.

Жұп, тақ және периодты функциялар

3. Жұп және тақ функциялар.

а) $f(-x)=f(x),\quad \forall x\in D$ болса, $f(x)$ - жұп функция;

б) $f(-x)=-f(x),\quad \forall x\in D$ болса, $f(x)$ - тақ функция.

4. Периодты функциялар. D облысында анықталған $f(x)$ фукциясы үшін $T>0$ саны табылып, $f(x+T)=f(x),\ \forall x\in D$, теңдігі орындалса, онда $f(x)$ периодты функция деп аталады.

Күрделі, кері және айқындалмаған функциялар

5. Күрделі функция. $y=f(u)$ функциясының анықталу облысы U, мәндер жиыны Y болсын, ал u айнымалысы X жиынында анықталған x – ке тәуелді, мәндер жиыны U болатын функция болсын: $u=\varphi(x)$. Сонда X жиынында берілген, мәндер жиыны Y болатын $y=f(\varphi(x))$ функциясы ***күрделі функция*** деп аталады.

Мысалы, $y=\ln\cos x$ – күрделі функция, өйткені оны былай жазуға болады: $y=\ln u,\ u=\cos x$.

6. Кері функция. $y=f(x)$ функциясының анықталу облысы X, ал мәндер жиыны Y болсын. Әрбір $y\in Y$ мәніне $f(x)=y$ теңдігі орындалатындай бір $x\in X$ мәнін сәйкес қойсақ, онда Y жиынында анықталған, ал мәндер жиыны X болатын $x=\varphi(y)$ функциясы анықталады. Осы функция $y=f(x)$ функциясының ***кері функциясы*** деп аталады және ол $x=\varphi(y)=f^{-1}(y)$ түрінде жазылады. $y=f(x)$ және $x=\varphi(y)$ функциялары өзара кері функциялар деп аталады.

7. Белгісіз функция y анық түрде берілмей, $F(x,y)=0$ түрінде берілсе, онда $F(x,y)=0$ тәуелділігі ***айқындалмаған функция*** деп аталады.

Функцияның параметрлік түрде берілуі

8. Функцияның $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ $\alpha < t < \beta$ параметрлік түрде берілуі. Егер $x = \varphi(t)$ функциясы үшін $t = \Phi(x)$ кері функция табылса, онда $y = \psi(\Phi(x)) = f(x)$ түрдегі y – тің x – ке тәуелді функциясын аламыз.

Ескерту: Функцияның параметр арқылы берілуі функцияның координат жүйесінде берілуінен көп тиімді, әрі кеңірек қолданылады.

Функцияның нүктедегі шегі

Функцияның нүктедегі шегі

Анықтама. a нүктесінің маңайы осы нүкте жататын кез келген интервал.

Дербес жағдайда, a нүктесінің $\delta-$маңайы – $(a-\delta, a+\delta)$ интервалы. $\delta-$маңайы $U_\delta(a)$ түрінде белгіленеді.

Анықтама. Егер кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $\delta > 0$ саны табылып, кез-келген $x \in U_\delta(a)$ үшін $|f(x) - A| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда A саны $f(x)$ функциясының x шамасы $a-$ға ұмтылғандағы $(x \to a)$ шегі деп аталады да, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ түрінде белгіленеді.

Ескерту: $f(x)$ функциясы a нүктесінде анықталуы да, анықталмауы да мүмкін.

Сол жақ және оң жақ шектер

Анықтама. Егер $\forall\varepsilon>0$ (кезкелген $\varepsilon>0$) саны, үшін $\exists\delta>0$ ($\delta>0$ саны) табылып, $\forall x\in(a-\delta,a)$ үшін $|f(x)-A|<\varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда A саны $f(x)$ функциясының $x-$тің $a-$ға сол жақтан ұмтылғандағы шегі немесе $f(x)$ функциясының a нүктесіндегі сол жақ шегі делінеді. Белгіленуінде: $f(a-0)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x)$.

Анықтама. Жоғарыдағыдай $f(a+0)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x)$ $f(x)$ функциясының a нүктесіндегі оң жақ шегі деп аталады.

Функцияның ақырсыздықтағы шегі

Функцияның ақырсыздықтағы шегі

Анықтама. Кезкелген $\varepsilon > 0$ ($\forall \varepsilon > 0$) саны үшін қандай да бір M саны табылып, $x > M$ болғанда $|f(x) - A| < \varepsilon$ орындалса, онда A саны $f(x)$ функциясының $x \to +\infty$ шегі деп аталады және $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ түрінде белгіленеді.

Анықтама. $\forall \varepsilon > 0$ саны үшін, M саны табылып, $x < M$ болғанда $|f(x) - A| < \varepsilon$ орындалса, онда A саны $f(x)$ функциясының $x \to -\infty$ шегі деп аталады және $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$ түрінде белгіленеді.

Анықтама. $\forall \varepsilon > 0$ үшін, $M > 0$ саны табылып, $|x| > M$ теңсіздігін қанағаттандыратын $x -$ тер үшін $|f(x) - A| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда A саны $f(x)$ функциясының $x \to \infty$ шегі деп аталады және $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$ түрінде белгіленеді.

Сан тізбегінің шегі

Ескерту: Жоғарыдағы анықтамалардан $f(x)$ функциясы ретімен алғанда $(M,+\infty)$, $(-\infty,M)$, $(-\infty,-M)\cup(M,+\infty)$ интервалдарында анықталады деп есептеледі. Дербес жағдайда, егер $f(x)$ функциясы $N=\{1,2,3,\ldots\}$ натурал сандар жиынында да анықталса, онда

$$a_1=f(1),\ a_2=f(2),\ a_3=f(3),\ \ldots,\ a_n=f(n,)\ \ldots$$

Белгілеулері $\{a_n\}$ сан тізбегін анықтайды. Ал $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ өрнегі былайша $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ сан тізбегі шегіне көшеді. Функцияның нүктедегі және ақырсыздықтағы шектерін шартты түрде $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ($a-$сан немесе $+\infty$, $-\infty$, ∞ шексіздіктерінің біреуі) етіп белгілейік. Онда функция шегінің қасиеттері мен тізбектер шегінің қасиеттері бірдей болады. Мысалы:

1) Тұрақты функцияның (тізбектің) шегі осы тұрақтыға тең,

Шектелген функция

2) Егер функцияның (тізбектің) шегі болса, онда ол жалғыз болады.

Анықтама. $f(x)$ функциясы Δ жиынында анықталып, $\forall x \in \Delta$ үшін C саны табылып, $f(x) \le C$ ($f(x) \ge C$) теңсіздігі орындалса, онда $f(x)$ функциясы Δ жиынында жоғарыдан (төменнен) шектелген делінеді. Функция жоғарыдан (төменнен) шектелсе, онда ол Δ аралығында шектеулі.

Мысалы,

а) $y = \sin x$ функциясы $(-\infty, +\infty)$ аралығында шектеулі, себебі кезкелген $x \in (-\infty, +\infty)$ үшін $-1 \le \sin x \le 1$;

б) $\{a_n\} = \{(-1)^n\}$ тізбегі шектеулі. $f(a-0)$, $f(a+0)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ шектері бар болғанда, функция $(a-\delta, a), (a, a+\delta), (M, +\infty), (-\infty, M)$ интервалдарында шектеулі.

в) $y = f(x)$ функциясы a нүктесінің маңайында шектеулі.

г) Шегі бар кезкелген сан тізбегі шектеулі.

Теорема. (a, b) интервалында функция өспелі (кемімелі) болса және осы аралықта жоғарыдан (төменнен) C санымен шектелсе, онда $f(b-0) = A, (f(a+0) = A)$, яғни функцияның b нүктесінде сол жақ (a нүктесінде оң жақ) шегі табылады және $A \le C \, (A \ge C)$.

Жаттығу: Бұл теореманы сан тізбегі үшін келтіріңіз.

Шексіз аз және шексіз үлкен функциялар

Шексіз аз және шексіз үлкен функциялар.

Анықтама. Егер $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ болса, онда теңдігі орындалса, онда $\alpha(x)$ функциясы $x\to a$ (x шамасы $a-$ға ұмтылғанда) шексіз аз шама (ш.а.ш.) деп аталады.

Анықтама. Егер $\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=+\infty$ болса, онда $\beta(x)$ функциясы $x\to a$ -ғы шексіз үлкен шама (ш.ү.ш.) деп атайды.

Теорема. Егер $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ (ш.а.ш.) болса, $\alpha(x)\neq 0, \forall x\, U_{\delta}(a)$ болса, онда $F(x)=\dfrac{1}{\alpha(x)}$ - функциясы $x\to a$ -ға ш.ү.ш. болады. Бұл теорема керісінше де ақиқат.

Шектер туралы негізгі теоремалар

Шектер туралы негізгі теоремалар. Егер $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, болса, онда

1. $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x) \pm g(x)\big) = A \pm B$
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = A\cdot B$
3. Кезкелген $x \in U_{\delta}(a)$ үшін, $g(x) \neq 0$ және $B \neq 0$ болса, онда $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$.

1-мысал

1-мысал. 1. $\lim\limits_{x\to 1}\left(3x^2-2x+7\right)=3\cdot 1-2\cdot 1+7=8$. Шекті есептеу үшін x-тің мәнін қойғанда $\frac{0}{0};\frac{\infty}{\infty};\infty-\infty;1^{\infty};0\cdot\infty;$ т.с.с. анықталмағандықтар пайда болады. Шекті есептеу деп осы анықталмағандықтарды ашуды айтады.

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+16)}{(x-2)(x-4)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+16}{x-4}=\dfrac{18}{-2}=-9$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x+1}{4x^2+2x+5}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{2x^2+3x+1}{x^2}}{\frac{4x^2+2x+5}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+2-x}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=\dfrac{2}{\infty}=0$.

Өзіңді тексеруге арналған сұрақтар

Өзіңді тексеруге арналған сұрақтар

1. Функция дегеніміз не? Оның анықталу облысы мен мәндер жиыны қалай анықталады?
2. Функцияны берудің қандай тәсілдері бар?
3. Функцияның шектелгендігі деген не?
4. Монотонды функция дегеніміз не?
5. Жұп және тақ функциялардың айырмашылығы қандай?
6. Периодты функция қалай анықталады?
7. Күрделі функция дегеніміз не?
8. Кері функция қашан бар болады?
9. Функцияның шегі ε–δ анықтамасы бойынша қалай беріледі?
10. Сол жақ және оң жақ шектердің айырмашылығы неде?
11. Шексіз аз және шексіз үлкен функция деген не?
12. Шектердің негізгі теоремаларын атаңыз.
13. Үздіксіздік анықтамасы. Үзіліс нүктелері түрлері.