№ 13-дәріс

Анықталған интеграл

Лекцияның мақсаты

Бұл дәрістің мақсаты – анықталған интеграл ұғымын оның интегралдық қосынды арқылы анықтамасынан бастап кезең-кезеңмен түсіндіру; интегралдың бар болу шарттарын (Коши теоремасы), анықталған интегралдың негізгі қасиеттерін, Ньютон–Лейбниц формуласының мәнін және оны қолдану әдістерін меңгерту. Сонымен қатар, анықталған интегралды есептеудің негізгі тәсілдерін: айнымалыны алмастыру және бөліктеп интегралдау формулаларын түсіндіру және оларды нақты мысалдарда қолдануға үйрету.

Қысқаша мазмұн

Қысқаша мазмұн

Дәрісте анықталған интеграл интегралдық қосындының шегі ретінде анықталады: кесіндіні бөліктерге бөліп, әрбір бөліктен алынған $f(c_i)\Delta x_i$қосындыларының шегі $\lambda \to 0$кезіндегі шама интеграл болады. Интегралдың бар болуы үшін функция үздіксіз болуы жеткілікті екені Коши теоремасымен негізделеді. Анықталған интегралдың негізгі қасиеттері — сызықтықтық, монотондық, аддитивтілік және шектерді алмастыру — дәл келтіріліп, олардың қарапайым есептерде қолданылуы көрсетіледі. Ньютон–Лейбниц формуласы анықталған интегралды алғашқы функция арқылы есептеуге мүмкіндік беретіні түсіндіріледі. Сонымен қатар интегралда айнымалыны алмастыру және бөліктеп интегралдау әдістері көрсетіліп, дәріс соңында осы тәсілдерді қолдануға арналған мысалдар беріледі.

Негізгі сұрақтар

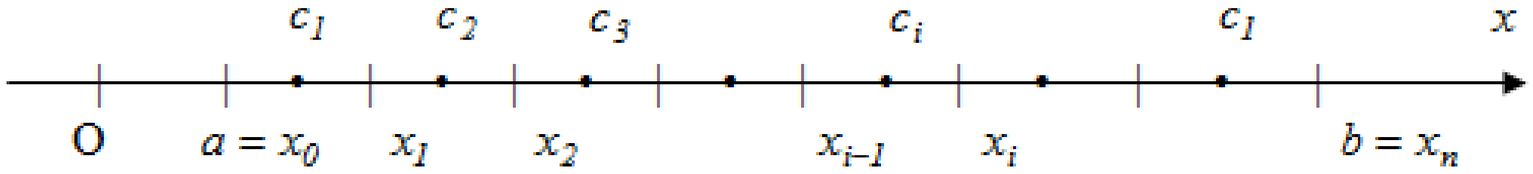
Негізгі сұрақтар

1. Анықталған интегралдың интегралдық қосынды арқылы анықтамасы
2. Интегралдық қосындыны құру: бөліктерге бөлу, c_iнүктесін таңдау
3. Интегралдық қосындының шегі және интегралдың бар болуы
4. Коши теоремасы – анықталған интегралдың бар болу шарты
5. Анықталған интегралдың қасиеттері
   – интегралдау айнымалысына тәуелді еместігі
   – интеграл шектерін алмастыру
   – сызықтық қасиеттер
   – аддитивтілік
   – монотондық
   – интеграл үшін орта мән теоремасы
6. Ньютон–Лейбниц формуласы
   – алғашқы функция ұғымы
   – анықталған интегралды есептеудегі рөлі
7. Анықталған интегралда айнымалыны алмастыру формуласы
8. Анықталған интегралды бөліктеп интегралдау формуласы
9. Барлық негізгі формулаларды мысалдар арқылы қолдану

Анықталған интегралдың анықтамасы

Анықталған интегралдың анықтамасы. $y = f(x)$ **функциясы** $[a, b]$ **кесіндісінде анықталсын, мұнда** $a < b$**. Төменгі амалдарды орындаймыз.**

1. $x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ $(x_0 < x_1 < \ldots < x_n)$ нүктелерімен $[a, b]$ кесіндісін n ***элементар кесінділерге*** (бөліктерге) бөлеміз: $[x_0; x_1], [x_1; x_2], \ldots, [x_{n-1}; x_n]$



2. Әрбір $[x_{i-1}; x_i]$, $i = 1,2,\ldots,n$ элементар кесіндінің ішінде жатқан, кез келген бір $c_i \in [x_{i-1}; x_i]$ нүктесін аламыз және осы нүктедегі функцияның мәнін есептейміз, яғни $f(c_i)$ шамасын табамыз.

3. Функцияның табылған $f(c_i)$ мәндерін сәйкес элементар кесінділердің ұзындығына, яғни $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ көбейтеміз: $f(c_i) \cdot \Delta x_i$.

4. Барлық осындай көбейтінділердің S_n қосындысын құрамыз:

Анықталған интегралдың анықтамасы

$$S_n = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \qquad (14.1)$$

(14.1) қосындысы $y = f(x)$ функциясының $[a, b]$ кесіндісіндегі ***интегралдық қосындысы*** деп аталады. Элементар кесінділердің ең үлкен ұзындығын λ деп белгілейміз: $\lambda = max\,\Delta x_i \ (i = 1,2,\ldots,n)$.

5. $n \to \infty$ ұмтылғанда, яғни $\lambda \to 0$ ұмтылғанда (14.1) интегралдық қосындысының шегін табамыз. Егер (14.1) – интегралдық қосындысы үшін ақырлы шек бар болып, ол $[a, b]$ кесіндісін дербес бөліктерге бөлу жолына және c_i нүктелерін таңдап алу тәсіліне тәуелсіз болса, онда ол шекті $f(x)$ функциясының $[a, b]$ кесіндісіндегі ***анықталған интегралы*** деп атайды және оны $\int_a^b f(x)dx$ символымен белгілейді. Сонымен,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

Мұндағы a санын – интегралдың төменгі шегі, ал b санын – жоғары шегі дейді. $f(x)$ – интеграл астындағы функция, $f(x)dx$ – интеграл астындағы өрнек деп аталады.

Егер $\int_a^b f(x)dx$ саны бар болса, онда $f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесіндісінде интегралданатын функция деп аталады. Енді анықталған интегралдың бар болуы туралы теореманы

Коши теоремасы

келтірейік.

Теорема (Коши). Егер $y = f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесіндісінде үзіліссіз болса, онда оның осы аралықта анықталған интегралы $\int_a^b f(x)dx$ бар. Егер $y = f(x)$ функциясының $[a,b]$ аралығында санаулы бірінші текті үзіліс нүктелері болса, онда бұл функция $[a,b]$ аралығында интегралданады.

Анықталған интегралдың қасиеттері

Анықталған интегралдың анықтамасынан шығатын оның кейбір қасиеттері:

1. Анықталған интеграл өзінің интегралдау айнымаласына тәуелді емес, ол тек интегралдың шектері мен $f(x)$ функциясынан тәуелді, яғни

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \ldots \int_a^b f(z)dz\,,$$

2. Егер $b = a$ болса, онда $\int_a^a f(x)dx = 0$

3. Кез келген нақты C саны үшін: $\int_a^b Cdx = C(b-a)$

Анықталған интегралдың қасиеттері.

Бұл бөлімде интегралданатын функцияларды қарастырамыз.

Анықталған интегралдың қасиеттері

1. $\int_a^b C \cdot f(x)dx = C \cdot \int_a^b f(x)dx$, мұнда C – нақты сан.
2. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.
3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(t)dt$
4. Егер $a < c < b$ теңсіздігі орындалса, онда $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.
5. Егер $[a,b]$ кесіндісінде $f(x) \le g(x)$ болса, онда $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

Орта мән туралы теорема

6. ***Орта мән туралы теорема.*** Егер $y = f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз болса, онда $[a,b]$ кесіндісінен $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$ теңдігі орындалатындай c саны табылады.

Ньютон–Лейбниц формуласы

Ньютон–Лейбниц формуласы. Егер $y = f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде интегралданатын болса, онда ол осы кесіндінің ішінде жатқан кез келген $[a,x]$ кесіндісінде де интегралданады. $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$, мұнда $x \in [a,b]$ функциясын қарастыралық.

Теорема. Егер $f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз болса, онда $\Phi(x)$ функциясы да $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз болады.

Теорема. $f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз болсын. Онда

Ньютон–Лейбниц формуласы

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt \right)' = f(x)$$

Салдар. $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз болған кез-келген $f(x)$ функциясының осы кесіндіде алғашқы функциясы бар, ол $\Phi(x)$ функциясына тең. Енді интегралды есептеудің негізгі формуласы **Ньютон–Лейбниц формуласына** көшелік.

Негізгі теорема. $y = f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз және $y = F(x)$ оның осы кесіндідегі алғашқы функциясы болсын. Онда

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \qquad (14.2)$$

(14.2) формуласы ***Ньютон–Лейбниц формуласы*** деп аталады. Ньютон–Лейбниц формуласы анықталған интегралды есептеу үшін өте қолайлы құрал. Оны қолдану үшін интеграл астындағы жатқан функцияның бір алғашқы функциясын білу жеткілікті.

1-мысал. $\int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0}{3} = \frac{8}{3}$.

Анықталған интегралда айнымалыны алмастыру

Анықталған интегралда айнымалыны алмастыру.

Теорема. $x=\varphi(t)$ функциясының $[\alpha,\beta]$ кесіндісінде үзіліссіз туындысы бар және $a=\varphi(\alpha),\ b=\varphi(\beta)$ болсын, ал $y=f(x)$ функциясы $x=\varphi(t),\ t\in[\alpha,\beta]$ түрінде берілген әрбір x нүктесінде үзіліссіз болсын. Сонда

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (14.3)$$

теңдігі әрқашанда орындалады. (14.3) формуласы анықталған интеграл үшін ***айнымалыны алмастыру формуласы*** деп аталады.

2-мысал

2-мысал. $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ интегралын есептеу керек.

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \left| x = \sin t, dx = \cos t dt; x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 1 \Rightarrow \sin t = 1 \Rightarrow \left(t = \frac{\pi}{2} \right) \right| =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)dt =$$

$$\frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin \pi}{2} \right) - \frac{1}{2}\cdot 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Анықталған интегралды бөліктеп интегралдау

Анықталған интегралды бөліктеп интегралдау.

Теорема. $u = u(x)$ және $v = v(x)$ функцияларының $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз туындылары бар болсын. Онда

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx .$$

Бұл теңдікті қысқаша түрде былай да жазуға болады

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu \qquad (14.4)$$

(14.4) анықталған интегралды ***бөліктеп интегралдау формуласы*** деп аталады.

3-мысал. $\int_1^e x\ln x dx = \int_1^e \ln x d\frac{x^2}{2} = \left|u = \ln x, du = \frac{1}{x}dx, v = \frac{x^2}{2}\right| = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx =$

$$= \frac{e^2}{2}\ln e - 0 - \int_1^e \frac{x}{2}dx = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4}\Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} .$$

Өзіңді тексеруге арналған сұрақтар

Өзіңді тексеруге арналған сұрақтар

1. Анықталған интеграл қалай анықталады? Интегралдық қосынды деген не?
2. Бөлу дәлдігі λнені білдіреді? $\lambda \to 0$болғанда неге ұмтылады?
3. $\int_a^b \quad f(x)\,dx$интегралдың бар болуы үшін қандай шарт қажет?
4. Коши теоремасы нені тұжырымдайды?
5. Анықталған интеграл айнымалыға неге тәуелді емес?
6. Интегралдың сызықтық қасиеттерін атаңыз.
7. Ньютон–Лейбниц формуласы қалай жазылады және ол нені білдіреді?
8. Анықталған интегралда айнымалыны алмастыру кезінде шектер қалай өзгереді?
9. Бөліктеп интегралдау формуласы қалай жазылады?
10. Неліктен анықталған интегралды есептеу үшін алғашқы функцияны табу жеткілікті?
11. Интеграл үшін орта мән теоремасы не дейді?
12. Мысал түрінде:
    - $\int_0^3 \quad x^2\,dx$интегралы қалай есептеледі?
    - $\int_a^b \quad f'(x)\,dx$неге тең?

Әдебиеттер

Әдебиеттер:
1. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа, 2005. Т.1. Т.2.
2. Индивидуальные задания по высшей м атем атике : учеб, пособие. В 4 ч. под общ. ред. А .П . Рябушко. - 5-е изд. – Минск : Выш. шк., 2009. - 304 с.
3. Электронная библиотека механико-математического факультета МГУ. URL: lib.mexmat.ru.
4. Электронные ресурсы издательства Springer. URL: http://link.springer.com/search?facet-content-type=%22Book%22&showAll=false.
5. Электронные ресурсы издательства Elsevier. URL: http://www.info.sciverse.com/sciencedirect/ books/subjects/mathematics.