№ 1-дәріс

Нақты сандар жиыны. Түзуде, жазықтықта және кеңістікте Декарттың тікбұрышты координаталары. Поляр координаталары. Кешен сандар. Кешен сандарды жазудың түрлері.

Лекцияның мақсаты

Студенттерді негізгі сан жиындарымен, логикалық символикамен, интервалдар мен кесінділердің қасиеттерімен, Декарттың және поляр координаталар жүйесінің негіздерімен, сондай-ақ кешен сандар ұғымымен және оларды жазу формаларымен таныстыру. Болашақта математикалық талдауды меңгеру үшін қажетті координаталық жүйелер мен сандық құрылымдар туралы бастапқы түсінік қалыптастыру.

Негізгі сұрақтар

Негізгі сұрақтар

1. Жиын және оның элементтері. Жиындарды берудің тәсілдері.
2. Негізгі сан жиындары: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.
3. Математикалық логика символикасы: кванторлар, импликация, конъюнкция, дизъюнкция, терістеу.
4. Интервалдар, кесінділер, жартылай интервалдар; шектелген және шектелмеген жиындар.
5. Түзудегі, жазықтықтағы және кеңістіктегі Декарттың тікбұрышты координаталар жүйесі.
6. Поляр координаталар жүйесі, оның Декарт координаталарымен байланысы.
7. Кешен сандар: анықтамасы, нақты және мним бөлігі.
8. Кешен сандарды жазу түрлері: алгебралық, тригонометриялық және көрсеткіш (Эйлер формасы).

Қысқаша мазмұн

Қысқаша мазмұн:

Бұл лекцияда негізгі сан жиындары, математикалық логиканың элементтері, интервал ұғымы мен жиындардың шектелгендігі қарастырылады. Сонымен қатар Декарттың және поляр координаталар жүйесі енгізіліп, кеңістіктегі нүктелердің орналасуы түсіндіріледі. Кешен сандар ұғымы беріліп, олардың алгебралық, тригонометриялық және көрсеткіш формалары қарастырылады.

Жиындар

Жиындар

Анықтама.

Жиын деп табиғаты әртүрлі объектілердің белгілі бір жиынтығын, тобын айтады. Осы жиынға енетін объектілер жиынның *элементтері* деп аталады.

Жазылуы:
$a \in A$— объект aжиынның элементі (яғни A-ға тиесілі).
Кері жағдайда:
$a \notin A$деп жазылады.

Ешбір элементі жоқ жиын **бос жиын** деп аталады және **Æ** символымен белгіленеді.

Егер $A \subset B$деп жазылса, онда Aжиынының әр элементі Bжиынының элементі деген сөз.
Бұл жағдайда Aжиыны B-ның *ішкі жиыны* (подмножество) деп аталады.

Жиындар **тең** деп аталады, егер олардың элементтері толық сәйкес келсе:
$A = B \Leftrightarrow A \subset B$және $B \subset A$.

Жиындарды берудің екі тәсілі

Жиындарды берудің екі тәсілі

а) Элементтерді тікелей көрсету арқылы:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

б) Белгілі бір қасиет арқылы сипаттау:

$$A = \{x \in T : \alpha(x)\}$$

яғни, T негізгі жиынының қасиеті $\alpha(x)$ орындалатын элементтері ғана алынады.

Сан жиындары

Жиын элементтері **сандар** болатын жиындар *сан жиындары* деп аталады.

Натурал сандар жиыны

Натурал сандар жиыны $\mathbb{N}$ арқылы белгіленеді:

$$\mathbb{N} = \{1,2,3, \dots\}$$

$\mathbb{N}$жиынында қосу және көбейту амалдары орындалады.

Бүтін сандар жиыны

Бүтін сандар жиыны $\mathbb{Z}$ арқылы белгіленеді:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

$\mathbb{Z}$жиынында қосу, азайту және көбейту амалдары орындалады.

Сан жиындары

Рационал сандар жиыны

Рационал сандар жиыны $\mathbb{Q}$ арқылы белгіленеді:

$$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\}$$

$\mathbb{Q}$жиынында төрт арифметикалық амалдың барлығы орындалады.

Нақты сандар жиыны

Барлық рационал және иррационал сандардың жиыны $\mathbb{R}$ деп белгіленеді.

$\mathbb{R}$жиынында барлық арифметикалық амалдар орындалады және теріс емес сандар үшін кез келген дәрежедегі түбір алуға болады.

Бұл сан жиындары бір-бірінің ішкі жиыны ретінде келесі түрде орналасады:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Математикалық логика символикасы

2. Математикалық логика символикасы

Қысқа және нақты жазу үшін математикалық логиканың негізгі символдары (кванторлар мен логикалық байланыстар) қолданылады. aжәне b– қандай да бір пікірлер болсын.

---

1) Импликация

Жазылуы:

$$a \Rightarrow b$$

«a-дан bшығады», «a болса, b» дегенді білдіреді.

⇒ – импликация символы.

Математикалық логика символикасы

2) Эквиваленттік

$$a \Leftrightarrow b$$

Бұл «a және bбір-біріне эквивалент» дегенді білдіреді, яғни
$a \Rightarrow b$және $b \Rightarrow a$екеуі де орындалады.
$\Leftrightarrow$ – эквиваленттік символы.

Кез келген теореманы былай жазуға болады:

$$a \Rightarrow b\text{немесе}a \Leftrightarrow b,$$

мұнда a– шарт, b– қорытынды.

Жалпылық кванторы. Бар болу кванторы

3) Жалпылық кванторы (әрбір, барлық)

$$\forall x \in X\colon P(x)$$

«X-тің әрбір элементі үшін $P(x)$ақиқат» деген мағынада.
∀ – жалпылық кванторы.

---

4) Бар болу кванторы (бар, табылады)

$$\exists x \in X\colon P(x)$$

«X-тің бір элементі бар, ол үшін $P(x)$ақиқат».
∃ – бар болу кванторы (Existenz — «бар» деген сөзден шыққан).

Егер мұндай элемент **біреу ғана** болса, онда:

$$\exists!\ x \in X\colon P(x)$$

Математикалық логика символикасы

5) «:» символы

«солай, сондай», «... дейтін» деген мағына береді.
Мысалы:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$$

---

6) Терістеу (инверсия)

$$\neg a \text{немесе} \bar{a}$$

Пікір a-ның терістеуі (жалғанын білдіреді).
Көп жағдайда «қарсы жору» әдісі қолданылады:

$$\neg b \Rightarrow \neg a \text{эквивалент} a \Rightarrow b$$

Конъюнкция. Дизъюнкция

7) Конъюнкция (және)

$$a \wedge b$$

«a және b» дегенді білдіреді.

∧ – конъюнкция символы.

---

8) Дизъюнкция (немесе)

$$a \vee b$$

«a немесе b» (логикалық «немесе»)

∨ – дизъюнкция символы.

Кесінді, интервал, шектелген жиын

3. Кесінді, интервал, шектелген жиын

$\mathbb{R}$жиынындағы ішкі жиындарға келесі белгілер енгізейік.

Кесінді (отрезок)

Егер нақты сандар xшамалары

$$a \leq x \leq b$$

теңсіздігін қанағаттандырса, онда мұндай сандар жиыны **кесінді** (ұштары aжәне b) деп аталады және былай белгіленеді:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b\}$$

Интервал. Жартылай ашық кесінділер

Интервал (ашық кесінді)

Егер xсандары

$$a < x < b$$

теңсіздігін қанағаттандырса, онда бұл жиын **интервал** немесе *ашық кесінді* деп аталады:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}: a < x < b\}$$

Жартылай ашық кесінділер (полуинтервалы)

$$[a, b) = \{x: a \leq x < b\}, (a, b] = \{x: a < x \leq b\}$$

Біріншісі — *сол жағынан жабық, оң жағынан ашық*,
екіншісі — *сол жағынан ашық, оң жағынан жабық* кесінді.

Кесінділер, интервалдар және жартылай интервалдар бірге **сан аралықтары** (числовые промежутки) деп аталады.

Окрестность (аймақ)

Окрестность (аймақ)

Интервал (a, b)нүкте x_0-ді қамтыса, ол нүктенің окрестности деп аталады.
Арнайы түрде,

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

интервалы x_0нүктесінің **ε-окрестности** деп аталады.

Шексіз интервалдар. Аралықтың ұзындығы

Шексіз интервалдар

Көбіне келесі интервалдар қарастырылады:

1. $(-\infty, \infty)$— барлық нақты сандар жиыны
2. (a, ∞)— барлық x, мұнда $x > a$
3. $(-\infty, b)$— барлық $x < b$
4. $[a, \infty)$— барлық $x \geq a$
5. $(-\infty, b]$— барлық $x \leq b$

Аралықтың ұзындығы

Егер aмен b— нақты, $a < b$, онда кесіндінің, интервалдың немесе жартылай интервалдың **ұзындығы**:

$$| b - a |$$

Шектелген жиын

Шектелген жиын

X— нақты сандар жиыны болсын.

Жоғарыдан шектелген жиын

Егер нақты Mсаны табылып,

$$x \leq M \text{әрбір } x \in X$$

болса, онда Xжоғарыдан шектелген.

Төменнен шектелген жиын

Егер нақты mсаны табылып,

$$x \geq m \text{әрбір } x \in X$$

Шектелген жиын

болса, онда Xтөменнен шектелген.

Шектелген жиын

Жиын әрі жоғарыдан, әрі төменнен шектелсе — ол **шектелген**.
Кері жағдайда — **шектелмеген** (неограниченное множество).

Жиын шектелген ⇔

$$\exists m, M \in \mathbb{R}: m \leq x \leq M$$

Мысал:
$[a, b]$— шектелген жиын, егер a, b— нақты шекті сандар.
(a, ∞)— **шектелмеген**, себебі жоғары шегі жоқ.

Декарт координаттар жүйесі

Декарт координаттар жүйесі

Кеңістіктегі Декарт координаттар жүйесі — бұл:

- бір нүкте (координат басы),
- және базис векторларының бағытында өтетін үш координат осі.

Ортонормаланған базис

Базис ортонормаланған деп аталады, егер:

- векторлар бір-біріне перпендикуляр (ортогонал),
- ұзындықтары 1-ге тең.

Осындай базиске сүйенген координат жүйесі
Декарттың тікбұрышты координаттар жүйесі деп аталады.

Поляр координаттар жүйесі

Поляр координаттар жүйесі

Поляр координаттар жүйесі:

- **O** нүктесі — полюс,
- полярлық ось — O нүктесінен шығатын бастапқы сәуле.

Нүктенің орны:

- радиус-вектор rарқылы,
- полярлық бұрыш φарқылы анықталады.

Декарт координаттарына түрлендіру

$$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$$

Кешен санның анықтамасы

Кешен сандар. Кешен сандарды жазу формалары

Кешен санның анықтамасы

Кешен сан **мына түрде** жазылады:

$$z = x + iy,$$

мұнда

- x— кешен санның **нақты бөлігі**,
- y— оның **мним бөлігі**,
- i— **мним бірлік**, ол үшін $i^2 = -1$.

Кешен санның нақты және мним бөліктері былай белгіленеді:

$$\Re z = x, \Im z = y.$$

Кешен сандарды жазу түрлері

Кешен сандарды жазу түрлері

1. Алгебралық форма

$$z = x + iy$$

Кең таралған негізгі форма. Қосу және азайту амалдарын орындауға өте ыңғайлы.

---

2. Тригонометриялық форма

Нөлден өзгеше кез келген кешен сан модулі мен аргументі арқылы жазылады:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

мұндағы

- $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ — кешен санның **модулі**,
- $\varphi = \arg z = \arctan\frac{y}{x}$ — кешен санның **аргументі**.

Көрсеткіш форма

3. Көрсеткіш форма (экспоненциалды форма, Эйлер формасы)

Эйлер формуласы:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Осыны қолдансақ:

$$z = re^{i\varphi}.$$

Пайдалану ерекшеліктері

- **Алгебралық форма** – қосу және азайтуға ең қолайлы.
- **Тригонометриялық және көрсеткіш форма** – көбейтуге, бөлуге, дәрежелеуге және түбір алуға өте тиімді.

Өзіңді тексеруге арналған сұрақтар

Өзіңді тексеруге арналған сұрақтар

1. **Множество дегеніміз не?** Множествоны берудің қандай тәсілдері бар?
2. **Негізгі сандық множительерді атаңыз** және олардың өзара байланысын көрсетіңіз.
3. $x \in A$және $A \subset B$жазулары қалай түсіндіріледі?
4. **Интервал, кесінді және жартылай интервал** дегеніміз не?
5. **Множествоның жоғарыдан және төменнен шектелуі** нені білдіреді?
6. **Декарттық координаттар жүйесі** дегеніміз не?
7. **Декарт координаталары поляр координаталары арқылы қалай өрнектеледі?**
8. **Кешен санның анықтамасын беріңіз.**
9. **Кешен сандарды жазудың қандай үш формасы бар?**
10. **Қай есептерде тригонометриялық және көрсеткіш (экспоненциалды) формаларды қолдану тиімді?**

Пайдаланылған әдебиеттер

Пайдаланылған әдебиеттер

1. **Александров П.С.** *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры*. – Серия: Учебники для вузов. Специальная литература, 2-е издание, стереотипное. Санкт-Петербург: Издательство «Лань», 2009. – 512 б.
2. **Беклемишев Д.В.** *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры*. – М.: ФМЛ, 2004.