№ 2-дәріс

Анықтауыштар. Анықтауыштардың негізгі қасиеттері. Анықтауыштарды есептеу әдістері. Матрицалар. Матрицалармен амалдар. Кері матрицалар. Матрицаның рангісі

Лекцияның мақсаты

Студенттерді матрицалардың негізгі түрлерімен, анықтауыштардың қасиеттерімен, кері матрицаны табу әдістерімен және сызықты теңдеулер жүйесін шешудің негізгі тәсілдерімен таныстыру. Матрица рангісі мен жүйенің үйлесімділігін анықтай білуге үйрету.

Негізгі сұрақтар

Негізгі сұрақтар:

- Матрицаның анықтамасы, өлшемі, элементтері; жол және баған матрицалар; квадрат, үшбұрышты, диагональ, бірлік және нөл-матрица; транспозиция.

- Матрицаларға қолданылатын амалдар: қосу, азайту, санға көбейту, матрицаларды көбейту және олардың қасиеттері.

- 2 және 3 ретті анықтауыштар; минор және алгебралық толықтауыш; анықтауыштардың негізгі қасиеттері; анықтауышты жол/баған бойынша жіктеу.

Негізгі сұрақтар

- Кері матрицаның анықтамасы, бар болу шарты ($\det A \neq 0$), кері матрицаны табу формуласы.
- Матрицаның рангі, кеңейтілген матрица және Кронекер–Капелли теоремасы.
- Сызықты теңдеулер жүйесін шешу әдістері: Крамер формуласы, матрицалық әдіс, Гаусс әдісі.
- Біртектес жүйелер және нөлдік емес шешімнің бар болу шарты.

Қысқаша мазмұны

Қысқаша мазмұны:

Матрица — элементтері ретпен жазылған сандық кесте. Лекцияда матрицалардың түрлері, олардың қасиеттері және олардың үстінде орындалатын амалдар қарастырылады.
Анықтауыштың анықтамасы, оны есептеу ережелері, минорлар және алгебралық толықтауыштар енгізіледі. Үшбұрышты матрицаның анықтауышы диагональ элементтердің көбейтіндісіне тең екені көрсетіледі. Кері матрица тек $\det(A) \neq 0$ болғанда ғана бар, ол алгебралық толықтауыштар арқылы табылады.

Сызықты теңдеулер жүйесінің үйлесімділігі матрицаның рангісі арқылы анықталады (Кронекер–Капелли теоремасы). Жүйені шешудің Крамер, матрицалық және Гаусс әдістері қарастырылады. Біртектес жүйелер үшін нөлдік емес шешімнің болуы рангіге байланысты.

Матрицалар

§1 Матрицалар

1.1.1 Негізгі түсініктер

1-анықтама. m жолдан n бағанадан тұратын тік бұрышты таблицаны (сандар кестесін) ***матрица***, ал $m \times n$ саны ***матрицаның өлшемі*** деп аталады.

Матрицаны құратын сандар оның элементтері деп аталады және олар кіші әріптермен, ал матрицаның өзі үлкен әріптермен белгіленеді, мысалы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

a_{ij} $\left(i = 1,2,3,\dots,m; \quad j = 1,2,3,\dots,n\right)$ арқылы матрицаның жалпы элементін белгілесек, онда (1) матрицаны a_{ij} арқылы былайша $A = \left(a_{ij}\right)$ жазуға да болады.

Матрицалар

Бір жолдың элементтерінен ғана құралған $(a_{11}a_{12}...a_{1n})$ матрицаны ***жол-матрица***, ал бір бағанның элементтерінен құралған $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ... \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ матрицаны **баған*матрица*** дейді. Барлық элементтерінің таңбалары A матрицасының элементтерінің таңбаларына қарама-қарсы болса, онда ол - A (минус A) деп белгіленеді.

Егер $m \neq n$ болса, матрица тік бұрышты, ал $m = n$ болса, ***квадрат-матрица*** деп аталады. Матрицаның бас диагоналының элементтері деп оның жолымен бағанасының нөмірлері тең $a_{ij}\,(i = j)$ элементтерін айтады. Квадрат матрицаның бас диагоналы $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ элементтерінен тұрады.

Үшбұрышты, диагональ, бірлік және нөл-матрица

2-анықтама. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ және $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ матрицалары ***үшбұрышты матрицалар*** деп аталады.

3- анықтама. Квадрат матрицаның бас диагоналының элементтерінен басқа элементтері нөлге тең болса, онда ол ***диагональ матрица*** деп аталады.

4-анықтама. Квадрат матрицаның бас диагоналында орналасқан элементтері бірге тең, ал басқа элементтерінің бәрі нөлге тең болса, онда ол ***бірлік матрица*** деп аталады және ол E әрпімен белгіленеді:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Барлық элементтері нөлге тең болатын матрица ***нөл-матрица*** деп аталады.

Транспозиция

5-анықтама. $m \times n$ өлшемді кез келген матрицаның барлық жолдарын сәйкес бағаналарымен ауыстырудан шыққан матрицаны ***транспозицияланған матрица*** дейді.

6-анықтама.Жолымен жолының саны, бағанымен бағанының саны тең матрицалар ***өлшемдері бірдей матрицалар*** деп аталады.

7-анықтама.Өлшемдері бірдей матрицалардың сәйкес элементтері өзара тең болса, онда ол матрицалар ***өзара тең*** деп аталады. Өлшемдері бірдей емес матрицалар үшін теңдік ұғымы анықталмаған.

A матрицасының транспозицияланған матрицасы A^{T} арқылы белгіленеді. Егер А-ның өлшемі $m \times n$ болса, онда A^{T} -ның өлшемі $n \times m$ болады.

Матрицаларға қолданылатын амалдар

1.1.2 Матрицаларға қолданылатын амалдар

1-анықтама. Бірдей өлшемді A және B матрицалардың қосындысы (айырмасы) деп элементтері бұл матрицалардың сәйкес элементтерінің қосындысынан (айырмасынан) тұратын C матрицасына айтады.

Өлшемдері бірдей матрицалар үшін қосу және азайту амалдары төмендегідей анықталады. Айталық өлшемдері бірдей $A=\left(a_{ij}\right)$ және $B=\left(b_{ij}\right)$ матрицалары берілсін. Онда

$$A\pm B=C=(c_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11}\pm b_{11} & a_{12}\pm b_{12} & \ldots & a_{1n}\pm b_{1n} \\ a_{21}\pm b_{21} & a_{22}\pm b_{22} & \ldots & a_{2n}\pm b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}\pm b_{n1} & a_{n2}\pm b_{n2} & \ldots & a_{nn}\pm b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матрицаларды қосу және азайту амалдары төмендегі қасиеттерге ие болатынына көз жеткізу қиын емес:

а) $A+B=B+A$;

ә) $\left(A+B\right)+C=A+\left(B+C\right)$;

б) $A+0=A$;

в) $A+\left(-A\right)=0$;

Матрицаны санға көбейту

2- анықтама. A матрицасының λ санына көбейтіндісі деп

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

матрицасын айтады.

Басқаша айтқанда, матрицаны санға көбейту деп оның барлық элементтерін сол санға көбейтуді айтады. Матрицаны санға көбейту амалы мынадай қасиеттерге ие:

1. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta) A$;
2. $(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$;
3. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
4. $1 \cdot A = A$.

Мұндағы α мен β сандар. Матрицаны матрицаға көбейту амалы көбейгіш матрицасының бағанасының саны көбейткіш матрицасының жолының санына тең болған матрицалар үшін ғана орындалады.

Матрицаларды көбейту

3-анықтама. $m \times n$ өлшемді $A = \left(a_{ij}\right)$ матрицасының $n \times p$ өлшемді $B = \left(b_{jk}\right)$ $\left(i = 1.2, ..., m;\ j = 1.2, ..., n;\ k = 1.2, ..., p\right)$ матрицасына көбейтіндісі деп өлшемі $m \times p$ болатын және әрбір c_{ik} элементі A матрицасының i-ші жолы мен B матрицасының k-шы бағанасының сәйкес элементтерінің көбейтіндісінің қосындысына тең $C = \left(c_{ik}\right)$ матрицасын айтады, яғни

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + ... + a_{in} b_{nk}.$$

Мысалы: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ берілсе, онда

Матрицаларды көбейту

$$C = AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Жалпы жағдайда $AB \neq BA$.

Матрицалардың көбейтіндісі мынадай қасиеттерге ие.

1. $AE = EA = A$;
2. $O \cdot A = A \cdot O = O$;
3. $A(BC) = (AB)C$;
4. $k(AB) = (kA)B = A(kB)$;
5. $(A+B)C = AC + BC$; $C(A+B) = CA + CB$.

Ескерту. $A \neq 0$, $B \neq 0$ матрицаларының көбейтіндісі нөл-матрицаға тең болуы мүмкін.

Матрицаларды қосуды, азайтуды және санға көбейтуді матрицаларға қолданылатын сызықтық амалдар деп атайды.

§2 Анықтауыштар

2.1 Негізгі түсініктер

Екінші ретті квадрат $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ матрицасын қарастырайық.

1-анықтама. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ матрицасының ***екінші ретті анықтауышы*** деп $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ санын айтады және оны былайша $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ белгілейді.

Сонымен, анықтама бойынша

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \qquad (1)$$

Енді үшінші ретті квадрат матрицаны қарастыралық.

Үшінші ретті анықтауыш

2-анықтама. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ матрицасының ***үшінші ретті анықтауышы*** деп алты мүшеден тұратын мынадай

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

санды айтады және оны былайша белгілейді.

Үшінші ретті анықтауыш

$$|A| = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Сонымен, анықтама бойынша

$$|A| = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \quad (2)$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Бұл ереже үшінші ретті анықтауышты есептеудің **үшбұрыш (Саррюс) ережесі** деп аталады.

Минор және алгебралық толықтауыш

3-анықтама. Үшінші ретті $|A|$ анықтауышының a_{ij} ***элементінің миноры*** деп ол анықтауыштан a_{ij} элементі орналасқан i - жол мен j - бағанды сызып тастау нәтижесінде пайда болатын екінші ретті анықтауышты айтады. Минор M_{ij} арқылы белгіленеді. Мысалы,

$$M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} .$$

4-анықтама. Үшінші ретті $|A|$ анықтауышының a_{ij} ***элементінің алгебралық толықтауышы*** деп M_{ij} минордың $(-1)^{i+j}$ таңбалы мәнін айтады. Мысалы,

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -M_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Анықтауыштардың қасиеттері

2.2 Анықтауыштардың қасиеттері

Анықтауыштар мынадай қасиеттерге ие:

1. A матрицасының анықтауышы транспозицияланған A^{T} матрицасының анықтауышына тең.
2. Анықтауыштағы кез келген екі жолдың (екі бағананың) орындарын ауыстырғаннан анықтауыштың тек таңбасы ғана өзгереді.
3. Егер анықтауыштың екі жолының (екі бағананың) сәйкес элементтері өзара тең болса, онда анықтауыштың мәні нөлге тең болады.
4. Егер анықтауыштың қандайда бір жолының (бағанасының) элементтерінің ортақ көбейткіші бар болса, онда оны анықтауыш таңбасының алдына шығаруға болады.
5. Егер анықтауыштың екі жолының (екі бағанасының) сәйкес элементтері пропорционал болса, онда ол анықтауыштың мәні нөлге тең болады.
6. Егер анықтауыштың кез келген бір жолының (бағанасының) элементтері екі қосындыдан тұрса, онда ол анықтауышты екі анықтауыштың қосындысы етіп жазуға болады. Мысалы,

Анықтауыштардың қасиеттері

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

7. Егер анықтауыштың кез келген бір жолын (бағанасын) бір санға көбейтіп, оған параллель жолдың (бағананың) сәйкес элементтеріне қосса, онда анықтауыштың мәні өзгермейді.

8. Анықтауыштың мәні оның кез келген жолының (бағананың) элементтерін сәйкес алгебралық толықтауыштарына көбейтіп қосқанға тең:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13},$$
$$\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23},$$
$$\Delta = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}.$$

Мысалы, $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & 4 \\ -4 & 5 & -5 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1} M_{11} + (-1)\cdot(-1)^{1+2} M_{12} + 2\cdot(-1)^{1+3} M_{13} =$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = -35 + 31 - 6 = -10.$$

Анықтауыштардың қасиеттері

9. Анықтауыштың кез келген жолының (бағананың) элементтеріне басқа жолының (бағананың) сәйкес элементтерінің алгебралық толықтауыштары көбейтілген қосынды нөлге тең.

Мысалы, $a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}=0,\ \ a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21}+A_{32}A_{31}=0.$

Ескерту. Осы қасиеттердің дұрыстығын (1) мен (2) формулалар арқылы тексеріп дәлелдеу қиын емес. Оларды дәлелдеулерді студенттердің өздеріне ұсынамыз.

1-теорема. n-ші ретті A матрицасының анықтауышы оның кез келген жолының (бағанының) элементтерін сәйкес алгебралық толықтауыштарына көбейтіп қосқанға тең.

Басқаша айтқанда,

$$\left|A\right|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in}. \qquad (3)$$

Теореманың дәлелін жоғары алгебра курсына тиісті басқа әдебиеттерден оқып алуға болады. (3) теңдік, анықтауышты i-ші қатар бойынша жіктеу деп те айтылады. (3) теңдіктің көмегімен n-ші ретті анықтауышты есептеу $(n-1)$-ретті анықтауыштарды есептеуге келтіріледі. Олардың әрқайсысына (3) теңдікті қолдану нәтижесінде $(n-2)$-ретті анықтауыштарды есептеуге

Анықтауыштардың қасиеттері

келтіріледі, т.с.с. Бұл күрделі есептеулерді анықтауыштың қасиеттеріне сүйене отырып ықшамдастыруға болады.

2-теорема.Квадрат үшбұрышты матрицаның анықтауышы оның бас диагоналінің элементтерінің көбейтіндісіне тең.

Мысалы: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot (-1) \cdot (-3) = 9.$

3-теорема. Егер A мен B өлшемдері бірдей квадрат матрицалар, ал $|A|$ мен $|B|$ олардың анықтауыштары болса, онда $C = A \cdot B$ көбейтінді матрицасының анықтауышы көбейткіштердің анықтауыштарының көбейтіндісіне тең, яғни

$$|C| = |A| \cdot |B|. \qquad (4)$$

Бұл теореманы 2-ретті квадрат матрица мысалында дәлелдеуді студенттердің өздеріне ұсынамыз.

Ескерту. 3-теоремадан $AB \neq BA$ жағдайда да $|AB| = |BA|$ болатындығы шығады.

Кері матрица

§3 Кері матрица

1-анықтама. A квадрат матрица элементтерінің алгебралық толықтауыштарынан құралған матрица тіркелген матрица деп аталады және ол $\tilde{A}$ әрпімен белгіленеді:

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Кері матрица

2- анықтама. Егер A квадрат матрицаның анықтауышы $\Delta = |A| \neq 0$ болса, ол ерекшеленбеген, ал егер $|A| = 0$ болса, онда ол ерекшеленген матрица деп аталады.

Кез келген $a \neq 0$ саны үшін $a^{-1} \cdot a = 1,\ a \cdot a^{-1} = 1$ теңдіктерді қанағаттандыратын a-ға кері a^{-1} саны бар екендігі мектеп математикасынан белгілі. Осыған ұқсас кері матрица ұғымы енгізіледі.

3-анықтама. A матрицасы үшін $AB = BA = E$ теңдіктері орындалса, онда B матрицасы A матрицасына кері матрица деп аталады да, ол $B = A^{-1}$ деп белгіленеді.

Нөлден өзгеше элементі бар кез келген матрица үшін кері матрица бар бола бермейді. Кері матрицаның бар болу шартын мына теорема береді.

Кері матрицаның бар болу шарты

1-теорема. A матрицасына кері A^{-1} матрицасы бар болуы үшін A ерекшеленбеген матрица болуы қажетті және жеткілікті.

Дәлелдеу. Қажеттілігі. Айталық A матрицаға кері A^{-1} матрицасы бар болсын. Бұл жағдайда A ерекшеленбеген матрица екендігін көрсетелік. Шынында да, егер $|A| = 0$ болса, онда

$$\left|AA^{-1}\right| = |A| \cdot \left|A^{-1}\right| = 0 .$$

Мұндай болуы мүмкін емес. Себебі 3-анықтама бойынша

$$A \cdot A^{-1} = E,$$

бұдан

Кері матрицаның бар болу шарты

$$\left|A \cdot A^{-1}\right| = |E| = 1$$

шығады, ендеше $|A| \neq 0$. Сонымен, A ерекшеленбеген матрица екен.

Жеткіліктілігі. Енді A матрицасының анықтауышы $|A| \neq 0$ болсын. A үшін кері матрицаның бар екенін көрсетелік.

Ол үшін

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Кері матрицаның бар болу шарты

матрицаларын құрамыз. Мұндағы B матрицасының A_{ij} элементтері a_{ij} элементтерінің алгебралық толықтауыштары. B матрицасы $\tilde{A}$ матрицасының транспозицияланған матрицасы.

Енді анықтауыштың 8, 9 - қасиеттерінен пайдалана отырып, мына көбейтіндіні табайық:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix} = |A| \cdot E.$$

$A \cdot \dfrac{B}{|A|} = E$ болғандықтан A матрицаға кері матрица A^{-1} бар және ол былай анықталады:

Кері матрицаның бар болу шарты

$$A^{-1} = \frac{B}{|A|}.$$

Сонымен, ерекшеленбеген $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ матрицаға кері A^{-1} матрица мынадай формуламен анықталады:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \frac{A_{31}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \frac{A_{32}}{|A|} \\ \frac{A_{13}}{|A|} & \frac{A_{23}}{|A|} & \frac{A_{33}}{|A|} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Кері матрицаны табу

Кері матрицаны табу алгоритмі:

1. Берілген A матрицасының анықтауышы $|A|$ есептеледі. Егер $|A|=0$ болса, онда кері матрица жоқ. Егер $|A|\neq 0$ болса, онда кері матрица бар.

2. $\tilde{A}$ матрицасының транспозицияланған B матрицасы табылады, ол үшін A матрицасының a_{ij} элементтеріне сәйкес A_{ij} алгебралық толықтауыштары есептеледі.

Кері матрицаны табу

3. (1) формула бойынша кері матрица табылады.

4. Табылған кері матрицаның дұрыстығы $A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = E$ теңдіктері арқылы тексеріледі.

2-теорема. Егер A^{-1} матрицасы A матрицасына кері болса, онда

$$\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}.$$

Дәлелдеу. Теореманың шарты бойынша $AA^{-1} = E$. §1.2-нің 3-теоремасын қолданамыз. $\left|AA^{-1}\right| = |A|\cdot\left|A^{-1}\right| = |E| = 1$.. Мұннан $\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$ теңдік шығады.

Кері матрицаны табу

3-теорема. Егер A ерекшеленбеген матрица болса, онда

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

Дәлелдеу. (1) формуладан $(A^{-1})^T = \frac{1}{|A|}\tilde{A}$ теңдігі шығады.

$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ болғандықтан $\left|A^T\right|^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}$. Сонымен теорема дәлелденді.

Ерекшеленбеген матрицалар үшін: 1) $(A^{-1})^{-1} = A$, 2) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$,

3) $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ теңдіктердің орындалатынын айта кетуді жөн көрдік.

Сызықты теңдеулер жүйесі

§4 Сызықты теңдеулер жүйесі

4.1 Негізгі түсініктер.Кронекер-Капелли теоремасы.

m теңдеуден және n белгісізден тұратын мына түрдегі жүйе:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_m x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_n = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (1)$$

сызықтық теңдеулер жүйесі деп аталады. Мұндағы $a_{ij}(i = 1,2,\ldots,m;$ $j = 1,2,\ldots,n)$ сандары жүйенің ***коэффициенттері,*** ал b_i сандары оның ***бос мүшелері***деп аталады.

Сызықты теңдеулер жүйесі

Егер (1) жүйесінде $b_1, b_2, ..., b_m$ мүшелерінің барлығы нөлге тең болса, ол жүйе ***біртекті,*** ал олардың ең болмағанда біреуі нөлден өзгеше болса, онда ол жүйе ***біртекті емес*** деп аталады.

Егер $x_1 = c_1,\ x_2 = c_2, ..., x_n = c_n$ сандары (1) жүйенің барлық теңдеулерін тепе-теңдікке айналдырса, онда ол сандар осы жүйенің ***шешімі***деп аталады.

Егер теңдеулер жүйесінің ең болмағанда бір шешімі бар болса, ол жүйе ***үйлесімді,*** ал ешқандай шешімі болмаса, ол жүйе ***үйлесімсіз*** деп аталады. Егер үйлесімді жүйенің жалғыз ғана шешімі бар болса, онда ол жүйе ***анықталған,***ал егер бірден көп шешімдері бар болса, онда ол жүйе ***анықталмаған*** деп аталады. Жүйе анықталмаған жағдайда, оның әрбір шешімі ***дербесшешім***, ал ол дербес шешімдердің жиыны жүйенің ***жалпы шешімі*** деп аталады. Жүйені шешу дегеніміз - оның үйлесімді немесе үйлесімсіз екенін айқындау және үйлесімді болған жағдайда оның жалпы шешімін іздеу.

Сызықты теңдеулер жүйесі

Егер де екі жүйенің жалпы шешімдері бірдей болса, яғни біреуінің шешімі екіншісінің де шешімі болса және керісінше, екіншісінің шешімі біріншісінің де шешімі болса, онда бұл жүйелер ***өзара пара-пар жүйелер*** деп аталады.

Біртекті жүйе әрқашан үйлесімді, себебі оның $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ шешімі бар. Бұл шешім ол біртекті жүйенің ***нөлдік шешімі*** деп аталады.

(1) жүйе коэффициенттерінен

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ және $$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$ матрицаларын құралық.

Кронекер–Капелли теоремасы

2-анықтама. A_1 матрицасы A матрицасының ***кеңейтілген матрицасы*** деп айтылады.

Кронекер-Капелли теоремасы. (1) Сызықты теңдеулер жүйесі үйлесімді болуы үшін жүйеге сәйкес A матрицасы мен оның кеңейтілген A_1 матрицасының рангілері өзара тең болуы қажетті және жеткілікті.

Соңғы теореманың дәлелін және осы тақырыптағы тұжырымдардың дәлелдерін жоғары алгебра пәні бойынша оқулықтардан оқып алуға болады.

Теңдеулер жүйесіне қолданылатын мынадай амалдар оны ***элементар (қарапайым) түрлендіру*** деп аталады:

1. Кез келген екі теңдеудің орнын ауыстыру;
2. Кез келген теңдеудің екі жағын нөлден басқа санға көбейту, не бөлу;

Кронекер–Капелли теоремасы

3. Кез келген теңдеуді бір санға көбейтіп басқасының сәйкес мүшелеріне қосу.

Элементар түрлендірулер нәтижесінде берілген жүйеге пара-пар жүйе пайда болады. Басқаша айтқанда екі жүйенің де шешімдері бірдей болады.

Сонымен, егер (1) жүйе үйлесімді болып, A матрицасының рангі $r = n$ болса, онда жүйенің жалғыз шешімі болады және ол Крамер немесе Гаусс әдістерімен табылады. Ал $r < n$ болса, онда (1) жүйеден анықтауышы нөлге тең болмаған r теңдеуін ғана алып қаламыз, қалғандары таңдалған теңдеулердің салдары болады. (1) жүйеден таңдалған жүйедегі теңдеулердің $n - r$ айнымалысына кез келген сан мән беріп оның шешімін Крамер немесе Гаусс әдісімен табамыз. Нәтижесінде (1) жүйенің шексіз көп шешімі алынады.

Біртектес теңдеулер жүйесі

4.2 Біртектес теңдеулер жүйесі

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{1}$$

біртектес сызықтық теңдеулер жүйесін қарастыралық. Бұл жүйе әруақытта үйлесімді, себебі $r(A) = r(\overline{A})$. 4.1 тақырыбында бұл жүйенің нөлдік шешімінің болатындығы туралы айтқанбыз. Ендігі мәселе қандай жағдайда (1) жүйесінің нөлдік емес шешімдерінің бар болатындығын айқындау.

1-теорема.Біртектес теңдеулер жүйесінің нөлдік емес шешімдері болу үшін, оның негізгі матрицасының рангісі белгісіздердің санынан аз болуы қажетті және жеткілікті.

Дәлелдеу. ***Қажеттілігі.*** Матрицаның рангісі оның өлшемінен аспайды, сондықтан $r \le n$. Айталық $r = n$ болсын. Бұл жағдайда өлшемі $n \times n$ болатын

Біртектес теңдеулер жүйесі

минордың ең болмағанда біреуі нөлден өзгеше болады. Сондықтан оған сәйкес сызықтық теңдеулер жүйесінің $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \Delta_i = 0, \Delta \neq 0$ түріндегі жалғыз ғана шешімі бар. Бұл нөлдік шешім. Демек, нөлдік шешімнен басқа шешімі жоқ. Олай болса, егер (1) жүйесінің нөлдік емес шешімі бар болса, онда $r < n$ болады екен.

Жеткіліктілігі. Айталық $r < n$ болсын. Онда біртектес үйлесімді жүйе анықталмаған жүйе болады. Демек, оның шексіз көп шешімдері бар, яғни нөлдік емес шешімдері де бар.

Енді n белгісізі бар n теңдеуден тұратын

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Біртектес теңдеулер жүйесі

біртектес сызықтық теңдеулер жүйесін қарастыралық.

(2) жүйесінің шешімі туралы төмендегі теорема толық мағлұмат береді.

2-теорема.*n* белгісізі бар *n* теңдеуден тұратын (2) сызықтық теңдеулер жүйесінің нөлдік емес шешімінің бар болуы үшін, ол жүйенің анықтауышының нөлге тең болуы қажетті және жеткілікті.

Дәлелдеу.*Қажеттілігі.* Егер (1.20) жүйесінің нөлдік емес шешімі бар болса, онда ол жүйенің анықтауышы $\Delta = 0$ болады. Себебі, $\Delta \neq 0$ болған жағдайда ол жүйенің жалғыз нөлдік шешімі бар.

Жеткіліктілігі. Егер $\Delta = 0$ болса, онда негізгі матрицаның рангісі белгісіздердің санынан аз, яғни $r < n$. Демек, жүйенің шексіз көп (нөлдік емес) шешімдері бар.

Сызықты теңдеулер жүйесін Крамер әдісімен шешу

4.3 Үш белгісізді сызықты теңдеулер жүйесін Крамер әдісімен шешу

Үш белгісізі бар сызықты теңдеулер жүйесін қарастырайық:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases} \qquad (1)$$

Бұл жүйенің шешімін мынадай түрде жазуға болады.

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}. \qquad (2)$$

(2) теңдік ***Крамер формуласы*** деп аталады. Мұндағы,

Сызықты теңдеулер жүйесін Крамер әдісімен шешу

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ \Delta_x=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{23} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ \Delta_y=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ \Delta_z=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

(2) формуладан

$$\Delta\cdot x=\Delta_x,\quad \Delta\cdot y=\Delta_y,\quad \Delta\cdot z=\Delta_z \tag{3}$$

теңдіктері шығады.

Үш жағдай болуы мүмкін.

1. $\Delta\neq 0$. Бұл жағдайда (1) жүйенің жалғыз шешімі (2) Крамер формуласы арқылы анықталады.

2. $\Delta=0$. Бұл жағдайда, егер Δ_x, Δ_y, Δ_z -тердің ең болмағанда біреуі нөлге тең болмаса, онда (1) жүйенің шешімі болмайды. Себебі, (3) теңдіктердің ең болмағанда біреуі орындалмайды, сондықтан (3) теңдеулер жүйесінің шешімі жоқ немесе үйлесімсіз деп аталады.

3. $\Delta=0,\ \Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$ болсын, онда (3) жүйенің шексіз көп шешімі болады.

Сызықты теңдеулер жүйесін матрицалық шешу

4.4 Үш белгісіздісызықты теңдеулер жүйесін матрицалық шешу

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \qquad (1)$$

сызықты теңдеулер жүйесі берілсін. Мынадай белгілеулер енгізейік:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

(1) жүйені осы белгіленген матрицалардың көмегімен былайша жазуға болады:

$$AX = B. \qquad (2)$$

Сызықты теңдеулер жүйесін матрицалық шешу

Егер A матрицасының анықтауышы $|A| \neq 0$ болса, онда ол ерекшеленбеген матрица болып, оның кері матрицасы A^{-1} бар болады. Кері матрицасын тауып, оны (2) теңдеудің сол жағынан көбейтеміз.

$$A^{-1}AX = A^{-1}B,$$

$$EX = A^{-1}B,$$

$$X = A^{-1}B.$$

Шыққан баған - матрицаның элементтері (1) жүйенің шешімі болады. Осы әдіс (1) сызықты теңдеулер жүйесін шешудің матрицалық әдісі деп аталады.

Анықтауышы $|A| = 0$ болатын жүйелерге бұл әдісті қолдануға болмағандықтан және сандық жүйені шешуге көп есептеулер талап ететіндіктен матрицалық әдіс практикалық есептерде сирек қолданылады.

Сызықты теңдеулер жүйесін Гаусс әдістерімен шешу

4.5 Үш белгісізді сызықты теңдеулер жүйесін Гаусс әдістерімен шешу

Гауссәдісінің мәнісі мынада: берілген жүйе қандайда бір элементарлық түрлендірулер арқылы оған пара-пар үшбұрышты немесе трапеция түріндегі жүйеге келтіріледі. Мысалы:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -5, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10. \end{cases}$$

жүйесін Гаусс түрлендіруі арқылы шешуді қарастырайық.

1. Екінші және үшінші теңдеулерде x_1 қатысқан мүшелерді жоямыз. Ол үшін алдымен бірінші теңдеуді 2-ге көбейтіп екіншіге қосамыз, кейіннен, бірінші теңдеуді - 3-ке көбейтіп үшіншіге қосамыз.

Сызықты теңдеулер жүйесін Гаусс әдістерімен шешу

2. Бірінші және қосқаннан кейінгі екінші теңдеуді өз қалпынша қалдырып үшінші теңдеуден x_2 қатысқан мүшені жоямыз. Ол үшін екінші теңдеуді тиісті санға көбейтіп үшінші теңдеуге қосамыз, яғни:

$$\left.\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=8, \\ -2x_1+3x_2-3x_3=-5, \\ 3x_1-4x_2+5x_3=10. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+2x_2+x_3=8, \\ 7x_2-x_3=11, \\ -10x_2+2x_3=-14. \end{cases} \right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1+2x_2+x_3=8, \\ 7x_2-x_3=11, \\ \frac{4}{7}x_3=\frac{12}{7}. \end{array}\right\}.$$

Берілген жүйе үшбұрыш түріндегі жүйеге келді.

Енді төменнен жоғары қарай айнымалыларды табамыз. Яғни үшінші теңдеуден x_3 -ті тауып, оның мәнін екіншіге қойып x_2 -ні анықтаймыз. Соңынан бірінші теңдеуден x_1 табылады, олар:

$$x_3=3, \quad x_2=2, \quad x_1=1.$$

Сызықты теңдеулер жүйесін Гаусс әдістерімен шешу

Ескерту. Жүйеге Гаусс түрлендірулерін жүргізгенде келесі екі жағдай болуы мүмкін:

а) жүйеде дұрыс емес теңдік пайда болуы мүмкін, яғни $0 = b,\ b \neq 0$, онда берілген жүйе үйлесімсіз болады;

б) жүйеде $0 = 0$ тепе-теңдіктер пайда болуы мүмкін, бұл жағдайда оларды есепке алмағанда, жүйедегі теңдеулер саны белгісіздер санынан кіші болса, онда жүйе трапеция түрінде болып оның шексіз көп шешім болады; теңдеу саны белгісіз санына тең болса, онда жүйе үшбұрыш түрінде болып оның жалғыз шешімі болады.

Өзіңді тексеруге арналған сұрақтар

Өзіңді тексеруге арналған сұрақтар:

- ***Матрица дегеніміз не? Оның элементтері қалай белгіленеді?***
- ***Қандай матрица квадрат матрица деп аталады?***
- ***Анықтауыштың негізгі қасиеттерін атаңыз.***
- ***Минор мен алгебралық толықтауыш дегеніміз не?***
- ***Кері матрицаның бар болу шарты қандай?***
- ***Кронекер–Капелли теоремасы нені тұжырымдайды?***
- ***Біртектес жүйеде нөлдік емес шешім қашан болады?***
- ***Гаусс әдісінің негізгі идеясы қандай?***

Қолданылған әдебиет тізімі

Қолданылған әдебиет тізімі:

1. Махмеджанов Н., Махмеджанова Р.Н. Жоғары математикадағы есептерінің жинағы. Оқу құралы – Алматы: Дәуір, – 2008. – 392 стр

2. Н. Махмеджанов. Жоғарғы математикадан тапсырмалар жинағы. Оқу құралы – Алматы: Қазақ университеті, 2014

3. Қасымов, Қ.Ә.. Жоғарғы математика курсы. – Алматы, 200;6

4. http://elibrary.kaznu.kz/ru

5. MOOC/видеолекции

6. http://open.kaznu.kz/courses/course-v1:KazNU+Math101+2019-2020_C1/about