№ 8-дәріс

Функцияның туындысы туралы түсінік. Туындының геометриялық және физикалық мағынасы. Функциялардың дифференциалдығы туралы түсінік. Функцияның дифференциалы. Күрделі функцияны дифференциалдау ережесі. Белгісіздікті ашу.Тізбектің және функцияның шектері Бірінші және екінші тамаша шектер.

Дәрістің мақсаты

Бұл дәрістің мақсаты – студенттерге туындының формалды (ε–δ) анықтамасын, оның геометриялық және физикалық мағыналарын меңгерту; функцияның дифференциалдануы, дифференциал формуласы және оның қасиеттерін түсіндіру; элементар функциялардың туындылары кестесін қолдана білу; қосынды, айырма, көбейтінді, бөлінді және күрделі функция туындысын табу ережелерін үйрету; кері функцияның және параметр бойынша берілген функциялардың туындысын есептеу тәсілдерін игерту; дифференциалды жуықтау есептерінде қолдану дағдысын қалыптастыру; бірінші және екінші тамаша шектерді пайдалана отырып әртүрлі белгісіздіктерді ашуды үйрету.

Негізгі сұрақтар

Негізгі сұрақтар

1. Аргумент пен функция өсімшесі (Δx, Δy)
2. Үздіксіздік және дифференциалдану
3. Туындының анықтамасы
4. Туындының геометриялық мағынасы:
   – жанаманың бұрыштық коэффициенті
5. Туындының физикалық мағынасы:
   – жылдамдық
6. Дифференциалдау ережелері:
   – қосынды
   – айырма
   – көбейтінді
   – бөлінді
7. Күрделі функцияның туындысы:

$$(f(\varphi(x)))' = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

Негізгі сұрақтар

8. Кері функцияның туындысы

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

9. Элементар функциялар туындыларының толық кестесі
10. Параметрлік түрде берілген функцияның туындысы

$$y' = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

11. Функцияның дифференциалы

$$dy = f'(x)\,dx$$

12. Дифференциалды жуықтап есептеулерге қолдану
13. Белгісіздіктерді ашу
14. Бірінші және екінші тамаша шектер

Қысқаша мазмұны

Қысқаша мазмұны

Бұл дәрісте туынды ұғымы оның классикалық ε–δ анықтамасы арқылы енгізіліп, геометриялық (жанама түзу бұрышының тангенсі) және физикалық (жылдамдық, өзгеру шегі) мағыналары түсіндіріледі. Дифференциалдану шарты, функцияның толық және

бірінші ретті дифференциалы, олардың формулалары мен қасиеттері қарастырылады. Элементар функциялардың туындылары, қосындының, айырманың, көбейтіндінің, бөліндінің, құрамды және кері функциялардың туындысын табу ережелері беріледі. Параметр арқылы берілген функциялар туындысы, жоғары ретті туындылар және оларды есептеу ережелері мысалдар көмегімен түсіндіріледі. Сонымен бірге бірінші және екінші тамаша шектерге сүйене отырып туынды табу, белгісіздіктерді ашу тәсілдері және дифференциалды жуықтаудың қолданылуы қарастырылады.

Аргумент пен функция өсімшесі

Айталық, $y = f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде және оның маңайында анықталған болсын.

Анықтама. Аргумент x -тің x_0 нүктесіндегі өсімшесі деп $\Delta x = x - x_0$ айырмасын атайды.

Анықтама. $y = f(x)$ функцияның x_0 нүктесіндегі өсімшесі деп $\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ айырмасын айтады.

Анықтама. Егер $y = f(x)$ функциясы x_0 нүктесінің маңайында анықталған және $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$ болса, онда ол x_0 нүктесінде үзіліссіз деп аталады. Шындығында да

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(f(x) - f(x_0)\right) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Туындының анықтамасы

Анықтама. $y = f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі туындысы деп

$$y'(x_0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ақырлы шегін айтады. Бұл туынды мына символдардың бірімен белгіленеді:

$$y'(x_0),\ \frac{df}{dx}(x_0),\ y'\Big|_{x=x_0},\ \frac{df}{dx}\Big|_{x=x_0},\ f'(x_0).$$

Егер $y = f(x)$ функциясының (a, b) интервалының әрбір нүктесінде туындысы болса, онда оны осы интервалда дифференциалданады дейді. Туындыны табу амалын дифференциалдау дейді.

Теорема. Егер $y = f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде дифференциалданатын функция болса, онда ол бұл нүктеде үзіліссіз болады.

Ескерту: теорема керісінше дұрыс емес.

Туындының геометриялық мағынасы

Туындының геометриялық мағанасы. Туындының геометриялық мағынасы: $f'(x_0)$ туындысы $y = f(x)$ функциясының графигіне $(x_0, f(x_0))$ нүктесінде жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициенті болады. Осы жанаманың теңдеуін былай жазады: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Туындының механикалық мағынасы. Егер $x-$ айнымалысын уақыт деп есептеп, $f(x)$ – функциясы дененің жүрген жолын сипаттаса, онда $f'(x)$ дененің $x-$ уақытындағы жылдамдығын білдіреді.

Дифференциалдаудың негізгі ережелері

Дифференциалдаудың негізгі ережелері. Туындының анықтамасын пайдаланып, кейбір элементар (қарапайым) функциялардың туындыларын есептейміз.

1. Көрсеткіштік функция $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

$\left(a^x\right)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a$. Дербес жағдайда $\left(e^x\right)' = e^x \ln e = e^x$.

2. Тригонометриялық функциялар $y = \sin x$, $y = \cos x$.

$$\left(\sin x\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\left(x + \Delta x\right) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \sin \dfrac{x + \Delta x - x}{2} \cos \dfrac{x + \Delta x + x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \dfrac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\dfrac{\Delta x}{2}} = \cos x.$$

Дәл осылай $y = \sin x$; $y'(x) = (\sin x)' = \cos x$ $\left(\cos x\right)' = -\sin x$.

3. Дәрежелік функция $y = x^\alpha$. $\left(x^\alpha\right)' = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$

Дербес жағдайда, $\left(x^2\right)' = 2 \cdot x^{2-1} = 2x$, $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -1x^{-1-1} = -\dfrac{1}{x^2}$.

Қосындыны, көбейтіндіні және қатынасты дифференциалдау ережелері

Теорема 1. (қосындыны, көбейтіндіні және қатынасты дифференциалдау ережелері). Егер $y = u(x)$ және $y = v(x)$ дифференцианалданатын болса, онда бұл функциялардың қосындысы, көбейтіндісі және қатынасы да (қатынастың бөлімі $v(x) \neq 0$) осы нүктеде дифференцианалданады және мына формулалар орынды:

1. $\left(u \pm v\right)' = u' \pm v'$
2. $\left(u \cdot v\right)' = u'v + uv'$
3. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Күрделі функцияның туындысы

Күрделі функцияның туындысы. $y = f(u),\ u = \varphi(x)$ функциялары үзіліссіз және дифференциалданатын функциялар болсын. Сонда күрделі $y = f(\varphi(x))$ функциясының туындысы:

$$y' = f'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'_u \cdot u'_x .$$

Сонымен $y' = f'_u \cdot u'_x$.

1–мысал. $y = \left(\sin x^2\right)'$ туындысын табу керек. Функцияны былай жазамыз $y = \sin x^2 = \sin u$, мұндағы $u = x^2$. Сондықтан

$$\left(\sin x^2\right)' = (\sin u)' \cdot (u)' = \cos u \cdot 2x = 2x \cdot \cos x^2 .$$

2–мысал. $y = (6x+7)^4$ туындысын табу керек. $y' = 4(6x+7)^3 \cdot 6 = 24(6x+7)^3$.

Кері функцияның туындысы

Кері функцияның туындысы. $y = y(x)$ және оған кері $x = x(y)$ функциялары $[a, b]$ кесіндісінде үзіліссіз және дифференциалданатын болсын. Сонда кері функцияның туындысы: $x'_y = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta y} = \dfrac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}} = \dfrac{1}{y'_x}$. Сонымен $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$ болады.

3–мысал. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{(\sin y)'} = \dfrac{1}{\cos y} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Мұнда $y = \arcsin x$, $x = \sin y$. $y = \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right], \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$.

4–мысал. $(arctgx)' = \dfrac{1}{(tgy)'} = \cos^2 y = \dfrac{1}{1 + tg^2 y} = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

Негізгі элементар функциялар туындыларының кестесі

Негізгі элементар функциялар туындыларының кестесі

1. $(c)' = 0.$
2. $\left(x^a\right)' = ax^{a-1}.$
3. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a\ ,\quad \left(e^x\right)' = e^x.$
4. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}\ ,\quad (\ln x)' = \dfrac{1}{x}.$
5. $(\sin x)' = \cos x.$
6. $(\cos x)' = -\sin x.$
7. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}.$
8. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}.$
9. $(shx)' = chx.$
10. $(chx)' = shx.$
11. $(thx)' = \dfrac{1}{ch^2 x}.$
12. $(cthx)' = -\dfrac{1}{sh^2 x}.$
13. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
14. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
15. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}.$
16. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}.$

Осы кесте мен туындыны есептеу ережелерінің жәрдемімен кез келген функциялардың туындысын табуға болады.

Параметр арқылы берілген функцияның туындысы

Параметр арқылы берілген функцияның туындысы. $y = f(x)$ функциясын кейде параметрлік түрде жазған ыңғайлы болады $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta].$

Онда $y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'_t}{x'_t}$. Сонымен параметр арқылы берілген функцияның туындысы: $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$

5–мысал. $\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases}$, y'_x табу керек. Шешімі: $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2t}{3t^2} = \frac{2}{3t}$

Функцияның дифференциалы

Функцияның дифференциалы. $y = f(x)$ функциясының шектелген туындысы бар болсын, онда: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$, демек $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x)$ $\left(\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0 \right)$, α – шексіз аз шама.

Онда функцияның өсімшесі былай жазылады: $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$. Осы теңдікте екінші қосылғыш $\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, Δx – ке қарағанда жоғарғы ретті шексіз аз шама болғандықтан, бірінші қосылғыш Δy – ке эквивалентті шама болады.

Анықтама. Функцияның туындысының аргументтің өсімшесіне көбейтіндісін дифференциал деп атайды және мына түрде жазады: $dy = f'(x)\Delta x$. Дербес жағдайда, егер $y = x$ болса, онда $dy = (x)' \Delta x = \Delta x$, осыдан $dx = \Delta x$ және осыны пайдаланып дифференциалдың формуласын былай жазуға болады: $dy = f'(x)dx$. Осыдан $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$, яғни туынды функцияның дифференциалының аргумент дифференциалына бөлінген мәніне тең.

Дифференциалды есептеу ережесі

Дифференциалды есептеу ережесі. Айталық $y = u(x)$ және $y = v(x)$ дифференциалданатын функциялар болсын,

1) $d(u \pm v) = du \pm dv$, $d(u + c) = du$, мұндағы c – сан.

2) $d(u \cdot v) = v\,du + u\,dv$, $d(cu) = c \cdot du$,

3) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$, егер $v(x) \neq 0$.

4) Егер $u = u(x)$ функциясы x нүктесінде дифференциалданатын, ал $y = f(u)$ u нүктесінде дифференциалданатын болса, онда $y = f(u(x))$ күрделі функция үшін, $df(u) = f'(u) \cdot u'(x)dx = f'(u)du$. Бұл ережені ***бірінші дифференциал формасының инварианттығы*** деп атайды. Дифференциалды жуықтап есептеуге қолдануға болады. Айталық, $y = f(x)$ функциясы дифференциалданатын болсын, онда оның өсімшесі:

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x), \text{ осыдан } f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy = f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Егер x_0 нүктесінде функцияның мәні берілсе, онда: $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$.

Дифференциалды жуықтап есептеулерге қолдану

6–мысал. $\sin 46^\circ$ -ты жуықтап есепте.

$$f(x)=\sin x,\ f'(x)=(\sin x)'=\cos x,\ \ x_0=45^\circ=\frac{\pi}{4},\ \ \Delta x=1^\circ=\frac{\pi}{180}$$

$$\sin(45^\circ+1^\circ)\approx \sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3{,}14}{180}\approx 0{,}7191\,.$$

Өзіңді тексеруге арналған сұрақтар

Өзіңді тексеруге арналған сұрақтар

1. Аргумент өсімшесі дегеніміз не?
2. Функция өсімшесінің анықтамасы қандай?
3. Үздіксіздік пен дифференциалданудың айырмашылығы неде?
4. Туынды анықтамасы (шек арқылы) қандай формуламен беріледі?
5. Туындының геометриялық мағынасы қандай?
6. Туындының физикалық мағынасы қалай түсіндіріледі?
7. Қосынды, көбейтінді және бөлінді туындысының формулаларын жазыңыз.
8. Күрделі функцияның туындысын табу ережесі қандай?
9. Кері функцияның туындысын табу формуласы қалай жазылады?
10. Параметрлік түрде берілген функцияда туынды қалай табылады?
11. Дифференциал дегеніміз не? Ол Δy-мен қалай байланысады?
12. Бірінші және екінші тамаша шектерді жазыңыз.
13. Дифференциалды жуықтап есептеулерде қолдану принципі қандай?

Әдебиеттер

Әдебиеттер: негізгі, қосымша
1. Махмеджанов Н., Махмеджанова Р.Н. Жоғары математикадағы есептерінің жинағы. Оқу құралы – Алматы: Дәуір, – 2008. – 392 стр
2. Н. Махмеджанов. Жоғарғы математикадан тапсырмалар жинағы. Оқу құралы – Алматы: Қазақ университеті, 2014
3. А.К. Дүйсек, С.Қ. Қасымбеков. Оқу құралы. – Алматы: ЖСШ «інжу маржан», 2004
4. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: ФМЛ, 2004.
5. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – Серия: Учебники для вузов. Специальная литература, 2-е издание, стереотипное, Санкт-Петербург: Издательство «Лань», 2009, 512 с.
6. Электронные ресурсы издательства Elsevier. URL: http://www.info.sciverse.com/sciencedirect/ books/subjects/mathematics.