№ 4-дәріс

Векторлар. Скалярлық көбейтінді. Векторлар

Лекцияның мақсаты

Бұл дәрістің мақсаты - студенттерді вектор ұғымымен, олардың түрлерімен, векторларға қолданылатын амалдармен, сызықтық тәуелділік ұғымымен, базис, координата, вектор модулі, нүкте координаталары, скалярлық көбейтінді және оның қасиеттерімен таныстыру. Геометриялық және аналитикалық интерпретацияларды түсінуге үйрету. Векторлық және аралас көбейтінділерімен таныстыру.

Негізгі сұрақтар

Негізгі сұрақтар

1. Вектор және оның қасиеттері
2. Нөлдік, бірлік, қарама-қарсы, тең, еркін, компланар және коллинеар векторлар
3. Векторларға қолданылатын амалдар:
   –қосу
   –алу
   –санға көбейту
   – параллелограмм және үшбұрыш әдістері
4. Сызықтық тәуелділік және тәуелсіздік
5. Векторлардың сызықтық комбинациялары
6. Базис және координаталар
7. Вектордың модулі
8. Нүкте координаталары және кесіндіні қатынаста бөлу
9. Векторлардың коллинеарлығы, теңдігі
10. Скалярлық көбейтінді
11. Скалярлық көбейтудің қасиеттері және қолданылуы
12. Бұрыш табу үшін скалярлық көбейтуді пайдалану
13. Векторлық және аралас көбейтінділер.

Қысқаша мазмұн

Қысқаша мазмұн:
Бұл лекцияда вектор ұғымы, оның негізгі түрлері (нөлдік, бірлік, қарама-қарсы, тең, коллинеар және компланар векторлар) және векторларға қолданылатын амалдар (қосу, азайту, санға көбейту) қарастырылады. Сызықтық тәуелділік пен тәуелсіздік түсініктері, векторлардың сызықтық комбинациясы, жазықтық пен кеңістіктегі базис және координаталар анықталады. Координаталық әдіспен векторлардың модулі, нүктелердің координаталары, екі нүкте арасындағы вектор және қашықтық табу тәсілдері келтіріледі. Сонымен қатар кесіндіні берілген қатынаста бөлу формулалары, векторлардың коллинеарлығы мен теңдігіне координаталық шарттар, скалярлық көбейту ұғымы, оның қасиеттері және бұрыш табуда қолданылуы түсіндіріледі. Лекция соңында алынған білімді бекіту үшін мысалдар мен бақылау сұрақтары ұсынылады.

Вектор және оның қасиеттері

Вектор деп бағытталған кесіндіні айтады, яғни кесіндінің белгілі бір ұзындығы және бағыты болады. Егер A – вектордың басы, ал B –вектордың ұшы болса, онда вектор $\overline{AB}$ немесе $\bar{a}$ символымен белгіленеді. $\overline{BA}$ векторы $\overline{AB}$ векторына ***қарама-қарсы вектор*** деп аталады (оның басы B нүктесінде, ал ұшы A нүктесінде орналасқан). $\bar{a}$ векторына қарама-қарсы векторды $-\bar{a}$ деп белгілейді. $\bar{a}$ векторының ***ұзындығы*** немесе ***модулі*** деп $\overline{AB}$ кесіндісінің ұзындығын айтады және оны $\left|\overline{AB}\right|$ немесе $\left|\bar{a}\right|$ деп белгілейді. Ұзындығы нөлге тең векторды ***нөлдік вектор*** деп атайды және ол $\bar{0}$ деп белгіленеді. Нөлдік вектордың бағыты болмайды.

Вектор және оның қасиеттері

Ұзындығы бірге тең векторды ***бірлік вектор*** деп атайды және оны $\bar{e}$ деп белгілейді. Егер бірлік вектордың бағыты $\bar{a}$ векторының бағытымен сәйкес келсе, онда ол $\bar{a}$ векторының ***орты*** деп аталады және $\bar{a}^{0}$ деп белгіленеді.

Параллель түзулерде немесе бір түзудің бойында жататын векторлар ***коллинеар векторлар*** деп аталады және $\bar{a} \parallel \bar{b}$ деп белгіленеді. Коллинеар векторлар бағыттас болуы да, қарама-қарсы бағытта да болуы мүмкін.

Егер екі $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторлары коллинеар болып, бағыттас және ұзындықтары бірдей болса, онда оларды ***тең векторлар*** ($\bar{a} = \bar{b}$) дейді. Тең векторлар еркін векторлар деп те аталады. Бұл векторлардың басталған нүктесін кеңістіктегі кез келген нүктеге көшіруге болады. Аналитикалық геометрияда еркін (бос) векторлар қарастырылады.

Егер кеңістіктегі үш вектор бір жазықтықта немесе параллель жазықтықтарда жатса, онда олар ***компланар векторлар*** деп аталады.

Векторларға қолданылатын сызықтық амалдар

Векторларға қолданылатын сызықтық амалдар

Сызықтық амалдар деп, векторларды қосу және алу, векторды санға көбейту амалдарын айтады.

Екі вектордың қосындысын екі жолмен табуға болады: бірі параллелограмм әдісі, екіншісі үшбұрыштар әдісі.

Параллелограмм әдісі. $\bar{a}$ және $\bar{b}$ ***векторларының қосындысы*** $\vec{a}+\vec{b}$ деп, $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларының ортақ бас нүктесінен шығатын, параллелограммның диагоналіне сәйкес келетін векторды айтады.

Үшбұрыштар әдісі. Егер $\bar{b}$ векторының басы $\bar{a}$ векторының ұшына орналасса, онда $\bar{a}$ және $\bar{b}$ ***векторларының қосындысы*** $\vec{a}+\vec{b}$ деп, $\bar{a}$ векторының басы мен $\bar{b}$ векторының ұшын қосатын векторды айтады.

Бір нүктеден шығатын $\bar{a}$ және $\bar{b}$ ***векторларының айырымы*** $\vec{a}-\vec{b}$ деп $\bar{b}$ векторының ұшын $\bar{a}$ векторының ұшымен қосатын векторды айтады.

$\bar{a}$ векторының λ санына көбейтіндісі деп ұзындығы $|\lambda|\left|\bar{a}\right|$-ға тең, $\bar{a}$ векторына коллинеар, егер $\lambda>0$ болса $\bar{a}$ векторымен бағыттас және $\lambda<0$ болса, $\bar{a}$ векторына қарама-қарсы бағытталған $\bar{b}=\lambda\bar{a}$ векторын айтады. $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларының ***коллинеарлығының қажетті және жеткілікті шарты:*** $\bar{a}=\lambda\bar{b}\ (\lambda\neq 0)$

Векторлардың сызықтық тәуелділігі. Базис

Векторлардың сызықтық тәуелділігі. Базис

$\overline{a_1},\overline{a_2},\ldots,\overline{a_n}$ векторлар жүйесі берілсін.

$\overline{a_1},\overline{a_2},\ldots,\overline{a_n}$ векторлар жүйесі үшін бәрі бірдей нөлге тең емес және

$$\lambda_1\overline{a_1}+\lambda_2\overline{a_2}+\ldots+\lambda_n\overline{a_n}=0 \qquad (3.1)$$

теңдігін қанағаттандыратын $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ сандары табылса, онда $\overline{a_1},\overline{a_2},\ldots,\overline{a_n}$ векторларын ***сызықтық тәуелді векторлар*** деп атайды. Ал егер (3.1) теңдік тек $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ сандарының барлығы бірдей нөлге тең болғанда ғана орындалса, онда $\overline{a_1},\overline{a_2},\ldots,\overline{a_n}$ векторлар жүйесі ***сызықтық тәуелсіз*** деп аталады.

Егер $\overline{b}=\lambda_1\overline{a_1}+\lambda_2\overline{a_2}+\ldots+\lambda_n\overline{a_n}$ теңдігі орындалатын $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ сандары табылса, онда $\overline{b}$ векторы $\overline{a_1},\overline{a_2},\ldots,\overline{a_n}$ векторларының ***сызықтық комбинациясы*** деп аталады.

Теорема. *Екі вектор сызықтық тәуелді болуы үшін олардың өзара коллинеар болуы қажетті және жеткілікті.*

Бұл теоремадан кез келген коллинеар емес ***екі вектор сызықтық тәуелсіз*** болады деген қорытынды шығады.

Векторлардың сызықтық тәуелділігі. Базис

Теорема. *Үш вектор сызықтық тәуелді болуы үшін олардың компланар болуы қажетті және жеткілікті.*

Бұл теоремадан кез келген компланар емес үш ***вектор сызықтық тәуелсіз векторлар*** жүйесін құрайды деген қорытынды шығады.

Егер жазықтықта кез келген $\bar{a}$ векторы үшін x_1, x_2 нақты сандары табылып, мына теңдік $\bar{a} = x_1\bar{e_1} + x_2\bar{e_2}$ орындалса, онда белгілі ретпен алынған $\bar{e_1}, \bar{e_2}$ сызықтық тәуелсіз векторлар жұбы ***жазықтықтағы базис*** деп аталады. Мұндағы x_1, x_2 сандары $\bar{a}$ векторының $\bar{e_1}, \bar{e_2}$ базисіндегі координаттары деп аталады да былай белгіленеді: $\bar{a}(x_1, x_2)$. Егер кеңістікте кез келген $\bar{b}$ векторы үшін x_1, x_2, x_3 нақты сандары табылып, мына теңдік $\bar{b} = x_1\bar{e_1} + x_2\bar{e_2} + x_3\bar{e_3}$ орындалса, онда белгілі ретпен алынған сызықтық тәуелсіз $\bar{e_1}, \bar{e_2}, \bar{e_3}$ векторлар үштігін ***кеңістіктегі базис*** деп атайды. Мұндағы x_1, x_2, x_3 сандары $\bar{b}$ векторының $\bar{e_1}, \bar{e_2}, \bar{e_3}$ базисіндегі координаттары деп аталады да былай белгіленеді: $\bar{b}(x_1, x_2, x_3)$.

Базисті құраушы векторлар ***базистік векторлар*** деп аталады. Осы анықтамалар мен теоремалардан кез келген коллинеар емес екі вектор жазықтықта, ал кез келген компланар емес үш вектор кеңістікте базистік векторлар жүйесі болады деген қорытынды шығады.

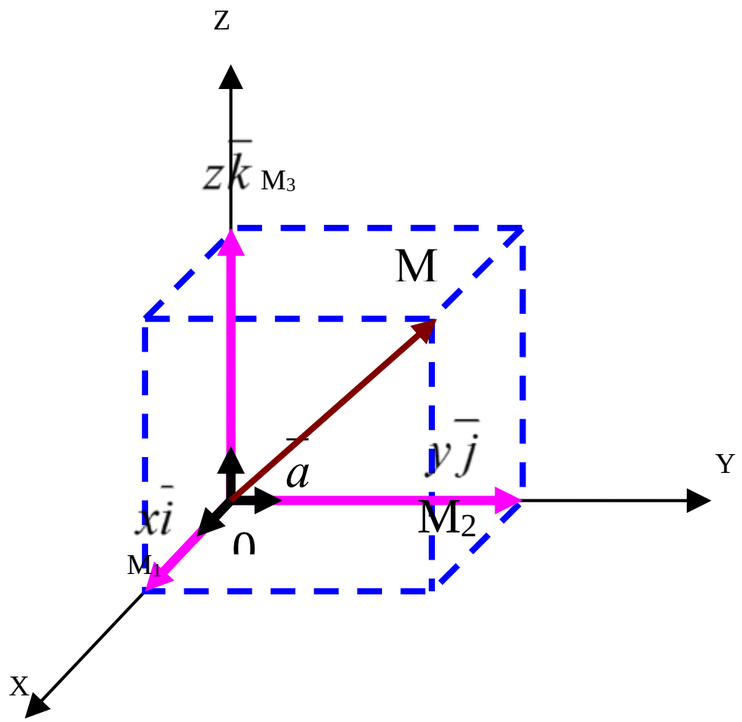
Векторды координат өстердің орттары арқылы жіктеу

Векторды координат өстердің орттары арқылы жіктеу. Вектордың модулі. Кеңістіктегі тік бұрышты декарттық $Oxyz$ координаталар жүйесін қарастырайық. *Ox, Oy, Oz* координат өстерінің бойында жатқан бірлік (**орт**) векторларды сәйкесінше $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ деп белгілейік. Сонда реттелген үштік $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ кеңістікте базистік векторлар жүйесін құрайды. Мұндай, базистік векторлар жүйесін **ортогональ** базистік жүйе (**базис**) деп атайды $\left(\bar{i} \perp \bar{j} \perp \bar{k}\right)$. $\overline{a} = \overline{OM} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, себебі үш вектордың қосындысы.

Бұл формула $\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ ***вектордың координат өстерінің орттары арқылы жіктелген*** түрі деп аталады немесе қысқаша $\bar{a} = (x, y, z)$ деп жазады.

Екінші жағынан $\left|\overline{OM}\right|^2 = \left|\overline{OM_1}\right|^2 + \left|\overline{OM_2}\right|^2 + \left|\overline{OM_3}\right|^2 = x^2 + y^2 + z^2$, Осыдан $\overline{OM} = \bar{a}$ болғандықтан $\left|\bar{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ***- вектордың модулі (ұзындығы).***

Векторды координат өстердің орттары арқылы жіктеу



Вектордың модулі. Бағыттаушы косинустар

1-мысал. Егер $\vec{a}=(1,2,3)$, онда $|\vec{a}|=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$ Егер $\bar{a}$ векторы Ox, Oy, Oz өстерімен сәйкесінше α,β,γ бұрыштарын құрса, онда

$x=|\bar{a}|\cos\alpha$, $y=|\bar{a}|\cos\beta$, $z=|\bar{a}|\cos\gamma$, осыдан $\cos\alpha=\frac{x}{|\bar{a}|}$, $\cos\beta=\frac{y}{|\bar{a}|}$, $\cos\gamma=\frac{z}{|\bar{a}|}$ болады.

Мұндағы $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ сандары $\bar{a}$ ***векторының бағыттаушы косинустары*** деп аталады. Алдыңғы өрнекті вектордың модулінің формуласына қойып, $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ теңдігін аламыз. $\bar{e}$ бірлік векторының координаттары $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ екенін оңай байқауға болады . Сонымен, $\bar{e}=(\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma)$.

2-мысал. $\vec{a}=(1,2,2)$, векторы үшін $\vec{a}^0=\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$

Координаттарымен берілген векторларға амалдар қолдану

Координаттарымен берілген векторларға амалдар қолдану

$\bar{a}=(x_1,y_1,z_1)=x_1\bar{i}+y_1\bar{j}+z_1\bar{k}$, $\bar{b}=(x_2,y_2,z_2)=x_2\bar{i}+y_2\bar{j}+z_2\bar{k}$ болса,

$1.\ \bar{a}\pm\bar{b}=(x_1\pm x_2;y_1\pm y_2;z_1\pm z_2)$

$2.\ \lambda\bar{a}=(\lambda x_1;\lambda y_1;\lambda z_1)$

Векторлардың теңдігі

$x_1=x_2$, $y_1=y_2$, $z_1=z_2$ болғанда ғана $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторлары тең болады, яғни

$\bar{a}=\bar{b} \Leftrightarrow x_1=x_2,\ y_1=y_2,\ z_1=z_2$

Векторлардың коллинеарлығы. $\bar{a}\parallel\bar{b}$ болғандықтан оны $\bar{a}=\lambda\bar{b}$ деп жазуға болады, мұндағы λ - қайсыбір сан. Осыдан $(x_1,y_1,z_1)=\lambda(x_2,y_2,z_2) \Rightarrow \frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$ -екі вектордың коллинеарлығының белгісі.

Нүкте координаталары

Нүктенің координатасы. Кеңістікте тік бұрышты декарттық $Oxyz$ координаттар жүйесі берілсін. Кез келген ***M нүктесінің координаты*** деп, $\overline{OM}$ векторының координатын айтады. $\overline{OM}$ векторы M нүктесінің радиус-векторы деп аталады және $\overline{OM} = \bar{r}$ деп белгіленеді. Сонымен, $\bar{r} = (x; y; z)$ немесе $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$. M нүктесінің координатасы $M(x; y; z)$ деп жазылады.

Вектордың координатасы. Егер $A(x_1; y_1; z_1)$ және $B(x_2; y_2; z_2)$ нүктелерінің координаттары берілсе, онда $\bar{a} = \overline{AB}$ ***векторының координатасы*** былай есептелінеді:

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

3-мысал. $A(1,-1,1)$, $B(2,3,4)$ берілсе, онда $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ базисінде $\overline{AB} = \vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$,

$$\vec{AB} = \{1;4;3\}.$$

Кесіндіні берілген қатынаста бөлу

Кесіндіні берілген қатынаста бөлу. $A(x_1;y_1;z_1)$ және $B(x_2;y_2;z_2)$ нүктелері арқылы өтетін кесінді берілсін. Осы кесіндіні $\lambda>0$ қатынасындай етіп бөлетін $N(x;y;z)$ нүктесінің координаттары: $x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$, $y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$, $z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$ - ***кесіндіні берілген қатынаста бөлу формулаларымен*** анықталады. Егер $\lambda=1$ болса, яғни $\overline{AN}=\overline{NB}$ онда $x=\frac{x_1+x_2}{2}$, $y=\frac{y_1+y_2}{2}$, $z=\frac{z_1+z_2}{2}$ - ***кесіндінің ортасын табу формуласы.***

Векторлардың скалярлық көбейтіндісі

Векторлардың скалярлық көбейтіндісі

Анықтама. Екі $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының ***скалярлық көбейтіндісі*** деп $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi$ санын айтады. Скаляр көбейтінді $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\vec{b}$, $(\vec{a},\vec{b})$ символдармен белгіленеді. Мұндағы $\varphi=(\bar{a},\wedge\bar{b})$ $np_{\bar{в}}\bar{a}=|\bar{a}|\cos\varphi$ $(\varphi=(\bar{a},\wedge\bar{b}))$, болғандықтан $\bar{a}\bar{b}=|\bar{b}|np_{\bar{в}}\bar{a}=|\bar{a}|np_{\bar{a}}\bar{в}$ деп жазуға болады.

4-мысал. Егер $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, $(\vec{a},\wedge\vec{b})=\frac{\pi}{3}$, онда $\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot4\cdot\cos\frac{\pi}{6}=6$

Теорема. $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ базисінде $\vec{a}$ векторының координаталары (x_1,y_1,z_1), ал $\vec{b}$ векторының координаталары (x_2,y_2,z_2) болсын. Онда $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

5-мысал. Егер $\vec{a}=(1,2,3)$, $\vec{b}=(4,5,6)$ болса, онда $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot4+2\cdot5+3\cdot6=32$

Скалярлық көбейтіндінің қолданылуы

1. $\cos\varphi=\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ немесе $\cos\varphi=\frac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$
2. $\bar{a}\perp\bar{b}\ \Leftrightarrow\ x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$
3. $np_{\bar{в}}\bar{a}=\frac{\bar{a}\cdot\bar{в}}{|\bar{в}|}$ $(np_{\bar{a}}\bar{в}=\frac{\bar{a}\cdot\bar{в}}{|\bar{a}|})$ немесе $np_{\bar{в}}\bar{a}=\frac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2}{\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$

Векторлардың векторлық көбейтіндісі

Векторлық және аралас көбейтінділер. Векторлардың векторлық көбейтіндісі

Үш компланар емес $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ векторлары берілсін. Егер $\bar{c}$ векторының ұшынан қарағанда $\bar{a}$ – дан $\bar{b}$ – ға дейінгі ең қысқа бұрылыс сағат тіліне қарсы бағытта орындалса, онда $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ векторлары ***оң үштік***, ал $\bar{a}$ – дан $\bar{b}$ – ға дейінгі ең қысқа бұрылыс сағат тілімен бағыттас болса, онда $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ ***сол үштік*** құрайды дейді.

Анықтама. $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларының ***векторлық көбейтіндісі*** деп, келесі үш шартты қанағаттандыратын $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ векторын айтады:

1) $\bar{c}\perp\bar{a},\ \bar{c}\perp\bar{b}$;

2) $\vec{c}$ векторының ұзындығы $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларына тұрғызылған параллелограммның ауданына тең, яғни $|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\varphi$, мұндағы $\varphi=(\bar{a},\wedge\bar{b})$;

3) $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ векторлары оң үштік құрайды.

Векторлық көбейтінді $\vec{a}\times\vec{b}$ немесе $[\bar{a},\bar{b}]$ деп белгіленеді.

Векторлық көбейтіндінің анықтамасынан $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$, $\bar{j}\times\bar{k}=\bar{i}$, $\bar{k}\times\bar{i}=\bar{j}$ болады

Векторлық көбейтіндінің қасиеттері

Векторлық көбейтіндінің қасиеттері:

1. $\vec{b}\times\vec{a}=-(\vec{a}\times\vec{b})$;
2. $\lambda(\bar{a}\times\bar{b})=(\lambda\bar{a})\times\bar{b}=\bar{a}\times(\lambda\bar{b})$;
3. Нөлдік емес $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары $\vec{b}\times\vec{a}=0$ жағдайда ғана колинеар;
4. $(\vec{a}_1+\vec{a}_2)\times\vec{b}=\vec{a}_1\times\vec{b}+\vec{a}_2\times\vec{b}$.

Теорема. Егер $(\bar{i};\bar{j};\bar{k})$ базисінде $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ векторлары берілсе,

онда $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}\bar{i}-\begin{vmatrix}x_1&z_1\\x_2&z_2\end{vmatrix}\bar{j}+\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}\bar{k}$.

1-мысал. $\vec{a}=(1,2,3)$, $\vec{b}=(4,5,6)$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&2&3\\4&5&6\end{vmatrix}=\vec{i}(2\cdot6-3\cdot5)-\vec{j}(1\cdot6-3\cdot4)+\vec{k}(1\cdot5-2\cdot4)=-3\vec{i}+6\vec{j}-3\vec{k}=(-3,\ 6,\ -3).$$

векторларының векторлық көбейтіндісін табу керек.

Векторлық көбейтіндінің қолданылуы

Векторлық көбейтіндінің қолданылуы

1. $S_{пар} = \left|\bar{a} \times \bar{b}\right|$, $S_{\Delta} = \dfrac{\left|\bar{a} \times \bar{b}\right|}{2}$

2. Егер $\bar{a} \parallel \bar{b}$ болса, онда $\bar{a} \times \bar{b} = 0$ (және керісінше)

Векторлардың аралас көбейтіндісі

Векторлардың аралас көбейтіндісі

Анықтама. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторларының аралас көбейтіндісі деп, $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларының векторлық көбейтіндісі мен $\bar{c}$ векторының скаляр көбейтіндісін айтады. $(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}$

Аралас көбейтінді $(\bar{a}\times\bar{b})\bar{c}$ не $[\bar{a}\bar{b}]\bar{c}$ немесе $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ түрінде жазылады. Аралас көбейтіндінің нәтижесі санға тең.

Аралас көбейтіндінің қасиеттері:

1. $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=(\bar{b}\times\bar{c})\cdot\bar{a}=(\bar{c}\times\bar{a})\cdot\bar{b}$;
2. $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})$;
3. $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=-\vec{a}\vec{c}\vec{b}=\vec{c}\vec{a}\vec{b}=-\vec{c}\vec{b}\vec{a}=\vec{b}\vec{c}\vec{a}=-\vec{b}\vec{a}\vec{c}$;
4. Егер векторлар $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланар болса, онда $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=0$.

Теорема. $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ базисінде $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$, $\vec{c}=(x_3,y_3,z_3)$

Векторлардың аралас көбейтіндісі

векторлары берілсін, онда олардың аралас көбейтіндісін анықтауыш түрінде жазуға болады.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Аралас көбейтіндінің қолданылуы

1. Егер $\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0$ болса, онда $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – **оң үштік**; егер $\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0$ болса, онда $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – **сол үштік** құрайды.
2. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлары компланар.
3. $V_{пар} = \left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|$, $V_{пир} = \frac{1}{6}\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|$.

Жазықтықтағы түзудің теңдеулері

Жазықтықтағы түзудің теңдеулері

1. Берілген нүктеден берілген векторға перпендикуляр өтетін түзудің теңдеуі

Түзудің бойында жатқан $M_0(x_0, y_0)$ нүктесі және оған перпендикуляр $\bar{n} = (A, B)$ векторы берілген. Түзудің бойынан кез келген $M(x; y)$ нүктесін аламыз. Сонда $\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0)$ болады. $\overline{M_0M}$ векторы түзудің бойында жатқандықтан $\overline{M_0M} \perp \bar{n}$ болады. Сондықтан олардың скалярлық көбейтіндісі $\bar{n} \cdot \overline{M_0M} = 0$, яғни

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \qquad (4.1)$$

Бұдан $\bar{n} = (A, B)$ векторы түзуге перпендикуляр екендігі шығады. Түзуге перпендикуляр кез келген вектор түзудің нормалы немесе нормалдық векторы деп аталады.

2. Түзудің жалпы теңдеуі

(4.1) теңдеуінде жақшаларды ашып, $-Ax_0 - By_0 = C$ деп белгілесек, түзудің жалпы теңдеуі шығады

$$Ax + By + C = 0 \qquad (4.2)$$

Жазықтықтағы түзудің теңдеулері

Егер $A=0$ болса, онда түзу Ox өсіне параллель өтеді; егер $B=0$ болса, онда түзу Oy өсіне параллель өтеді; егер $C=0$ болса, онда түзу жүйенің бас нүктесі арқылы өтеді.

3. Түзудің бұрыштық коэффициент арқылы берілген теңдеуі. Егер $B \neq 0$ болса, онда (4.2) теңдеуінен $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ ($-\frac{A}{B} = k$, $-\frac{C}{B} = b$):

$$y = kx + b \tag{4.3}$$

4. Екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуі.

Түзу $M_0(x_0, y_0)$ және $M_1(x_1, y_1)$ нүктелерінен өтсін. Түзудің бойынан кез келген $M(x; y)$ нүктесін аламыз. Сонда бұл түзудің теңдеуі төмендегідей болады:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \tag{4.4}$$

5. Түзудің кесінділік теңдеуі

Түзу $M_0(a, 0)$ және $M_1(0, b)$ нүктелері арқылы өтсін. Сонда (4.4) формуласынан түзудің кесінділік теңдеуін аламыз:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \tag{4.5}$$

6. Берілген нүктеден өтетін түзудің теңдеуі

$$y - y_0 = k(x - x_0) \tag{4.6}$$

Екі түзудің арасындағы бұрыш

7. Екі түзудің арасындағы бұрыш. $y = k_1 x + b_1$ және $y = k_2 x + b_2$ түзулерінің арасындағы бұрыштың формуласы:

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \tag{4.7}$$

Осыдан егер түзулер параллель болса, онда $k_1 = k_2$, ал түзулер перпендикуляр болса, онда $k_1 = -\frac{1}{k_2}$ болады.

Түзулер $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ және $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ теңдеулерімен берілсе, онда $\bar{n}_1 = (A_1; B_1)$, $\bar{n}_2 = (A_2; B_2)$ болғандықтан түзулердің арасындағы бұрыш осы екі нормальдің арасындағы бұрышқа тең:

$$\cos\varphi = \frac{\bar{n}_1 \bar{n}_2}{|\bar{n}_1||\bar{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \tag{4.8}$$

Осыдан егер түзулер параллель болса, онда $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$, ал перпендикуляр болса, онда $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$ болады.

Нүктеден түзуге дейінгі қашықтық

8. Нүктеден түзуге дейінгі қашықтық. $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінен $Ax + By + C = 0$ түзуіне дейінгі қашықтықтың формуласы:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad (4.9)$$

2-мысал. $O(0;0)$ нүктесінен $6x + 8y + 20 = 0$ түзуіне дейінгі қашықтықты табу керек.

$$d = \frac{|6 \cdot 0 + 8 \cdot 0 + 20|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{20}{10} = 2$$

Өзіңді тексеруге арналған сұрақтар

Өзіңді тексеруге арналған сұрақтар

1. Вектор дегеніміз не?
2. Нөлдік, бірлік және қарама-қарсы векторлар қалай анықталады?
3. Коллинеар және компланар векторлар деген не?
4. Векторлардың қосындысы қалай табылады (екі әдіс)?
5. Сызықтық тәуелділік пен тәуелсіздік анықтамалары қандай?
6. Базис дегеніміз не?
7. Вектор координаталары қалай анықталады?
8. Нүктелер арасындағы қашықтық формуласы қандай?
9. Скалярлық көбейту анықтамасы және формуласы?
10. Қай жағдайда векторлар перпендикуляр?
11. Бағыттаушы косинустар деген не?
12. Векторлық және аралас көбейтінділер анықтамасы және формуласы?

Әдебиет тізімі

Қолдаыналған әдебиет тізімі:

1.Қабдықайырұлы Құрмет және т.б.. Жоғары математика.- Алматы, 2002
2. А.К. Дүйсек, С.Қ. Қасымбеков. Оқу құралы. – Алматы: ЖСШ «інжу маржан», 2004
3. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: ФМЛ, 2004.
4. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – Серия: Учебники для вузов. Специальная литература, 2-е издание, стереотипное, Санкт-Петербург: Издательство «Лань», 2009, 512 с.
5. Электронная библиотека механико-математического факультета МГУ. URL: lib.mexmat.ru.
6. Электронные ресурсы издательства Springer. URL: http://link.springer.com/search?facet-content-type=%22Book%22&showAll=false.