ЛЕКЦИЯ 14

Некоторые приложения определённых интегралов

Площади • Длины дуг • Объёмы • Поверхности

Цель и план лекции

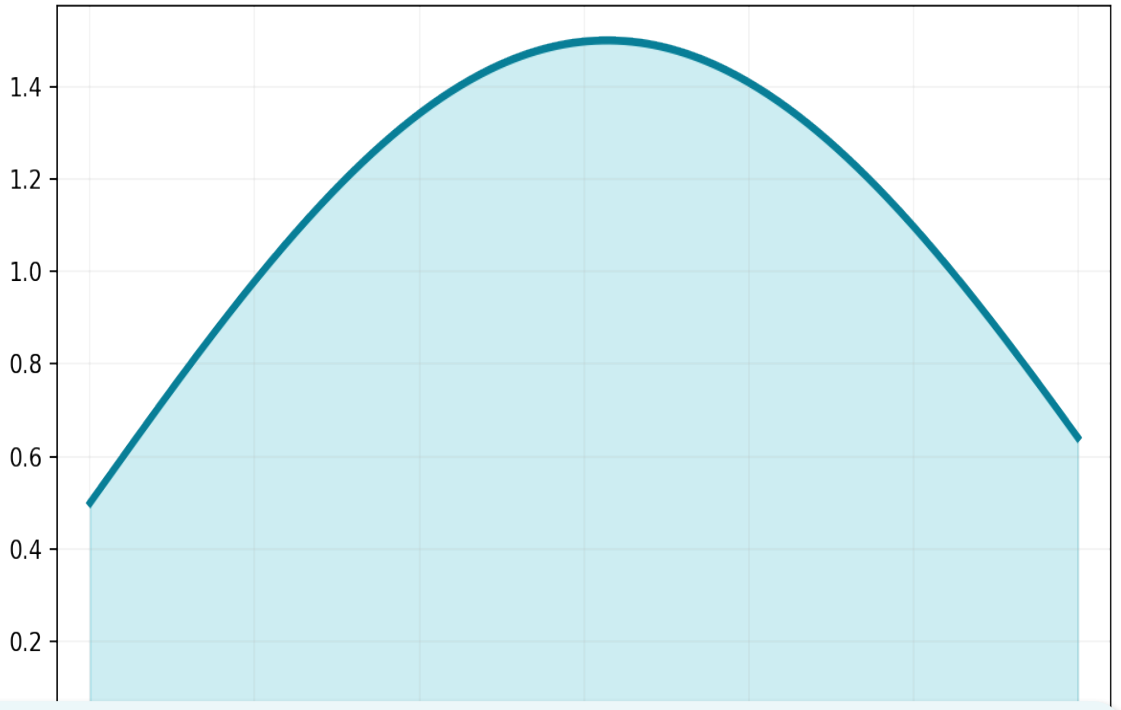
Научиться применять определённый интеграл для вычисления геометрических величин.

1. Площадь в декартовых и полярных координатах
2. Параметрическое задание кривых
3. Длина дуги
4. Объёмы и поверхности вращения

Площадь в декартовых координатах

Для непрерывной $f(x) \geq 0$ площадь криволинейной трапеции равна интегралу.

Если график ниже Ox, определённый интеграл отрицателен.

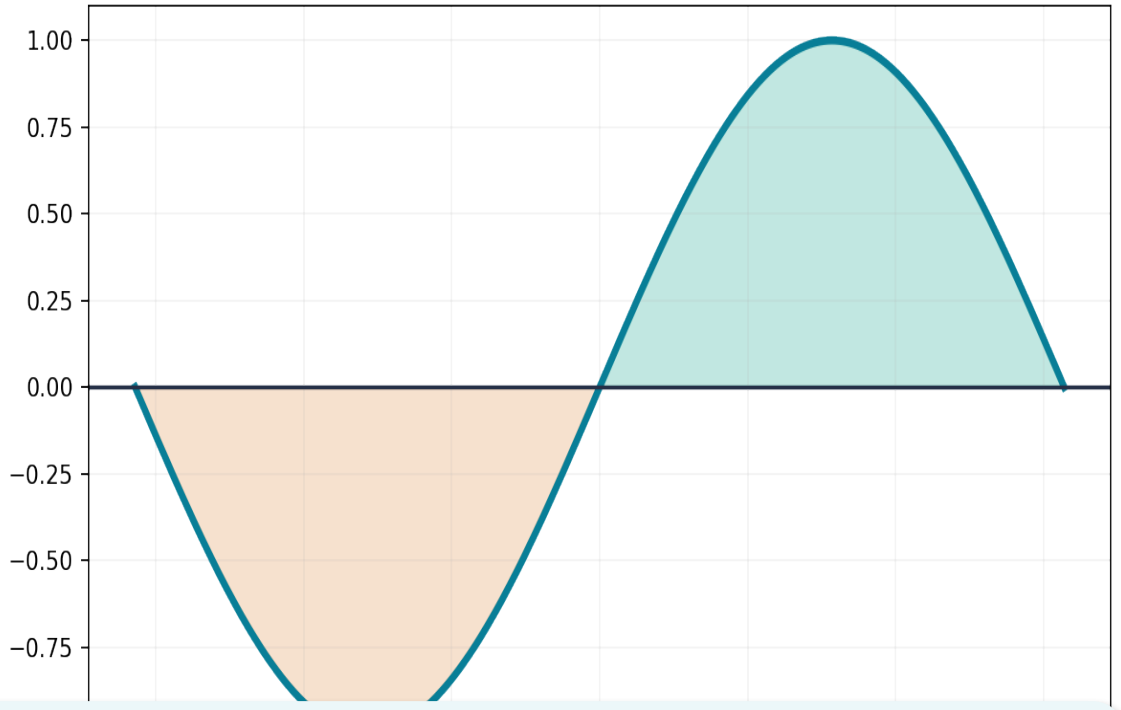


$$S = \int_a^b f(x)\,dx, \quad f(x) \geq 0$$

Геометрическая площадь и знак интеграла

Если функция меняет знак, интеграл учитывает ориентированную площадь.

Геометрическая площадь складывает положительные площади всех частей.



$$S = \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Параметрически заданная кривая

Кривая: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$.

При подходящей ориентации и монотонности $x(t)$ используется замена переменной.

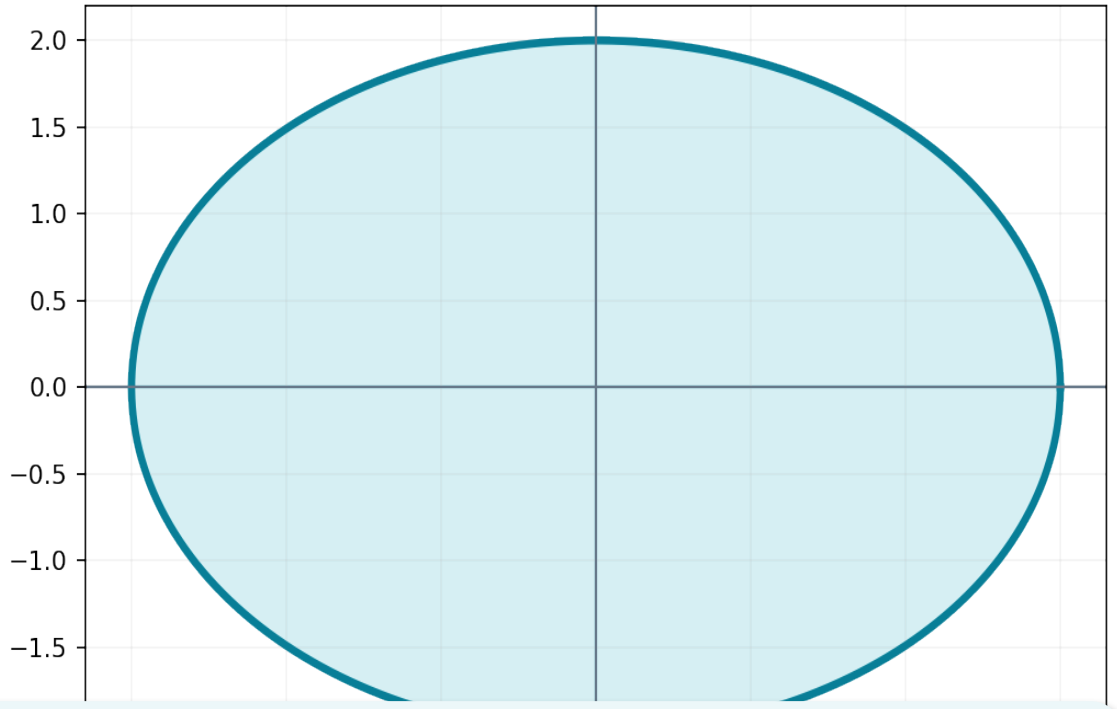
$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\, x'(t)\, dt$$

Пример 1. Площадь эллипса

Полуоси эллипса: a и b.

$x = a\cos t,\ \ y = b\sin t.$

Вычисляем площадь верхней половины, затем удваиваем.



$S = \pi ab$

Полярные координаты

Полярный радиус ρ — расстояние до полюса.

Угол φ отсчитывается от полярной оси.

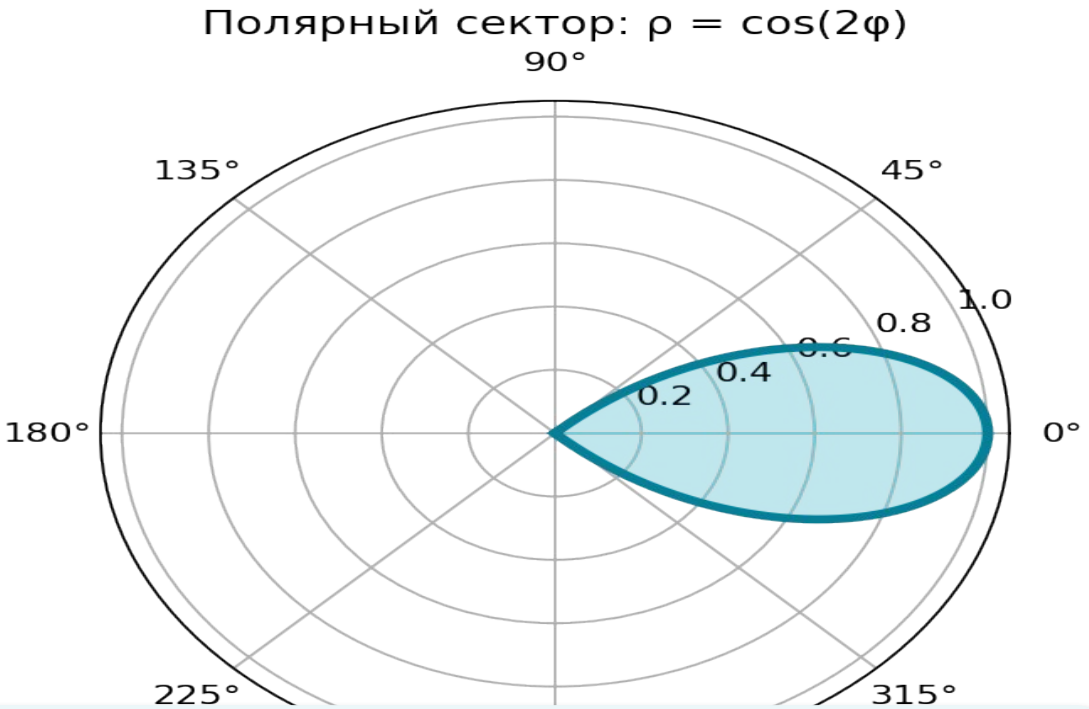
Площадь малого сектора: $\Delta S \approx \tfrac{1}{2}\rho^2\,\Delta\varphi$.

$$x = \rho\cos\varphi,\quad y = \rho\sin\varphi$$

Площадь в полярных координатах

Область задана неотрицательной функцией $\rho = f(\varphi)$, $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$.

Разбиение на узкие секторы приводит к интегралу.



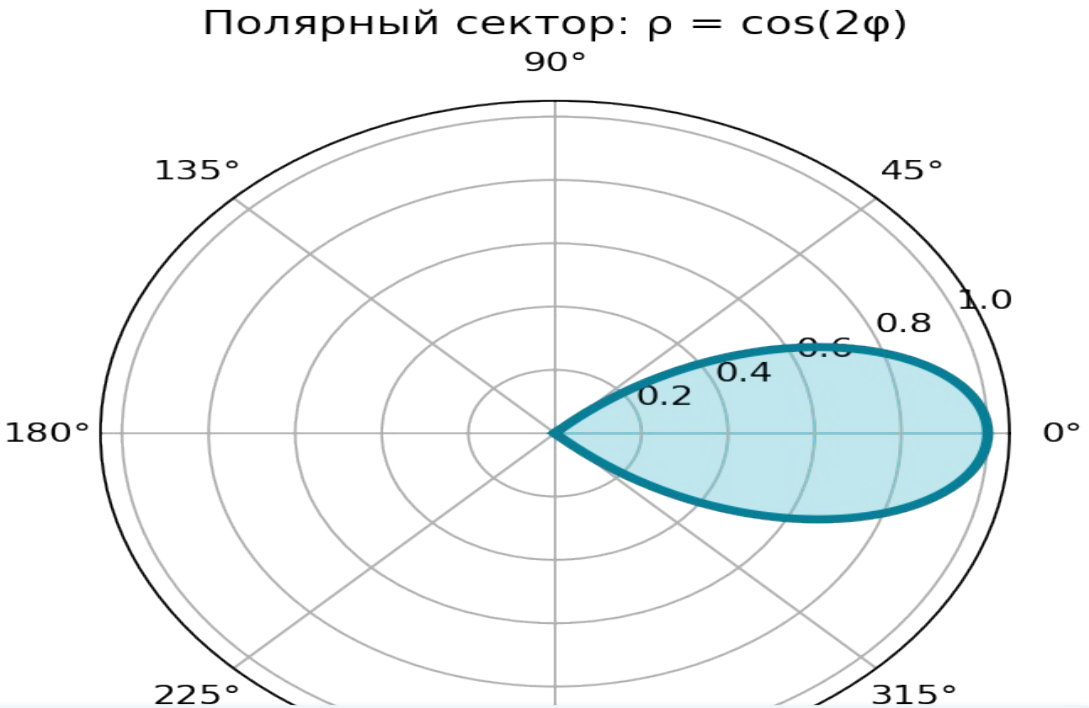
$$S = \tfrac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} [f(\varphi)]^2 \, d\varphi$$

Пример 2. Полярная кривая

По лекции: ρ = a cos(2φ).

Рассматриваем интервалы, где ρ ≥ 0, используем симметрию четырёх секторов.

Внимание: в исходном тексте название «лемниската Бернулли» и



$S = \pi a^2/2$ (для четырёх лепестков)

стандартном соглашении о знаковых радиусах.

Длина дуги: определение

Аппроксимируем гладкую кривую вписанной ломаной.

Длиной кривой называется предел длин ломаных при измельчении разбиения.

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Длина дуги в разных координатах

Параметрическая кривая x(t), y(t):

Полярная кривая ρ = f(φ):

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'^2 + y'^2)}\, dt$$

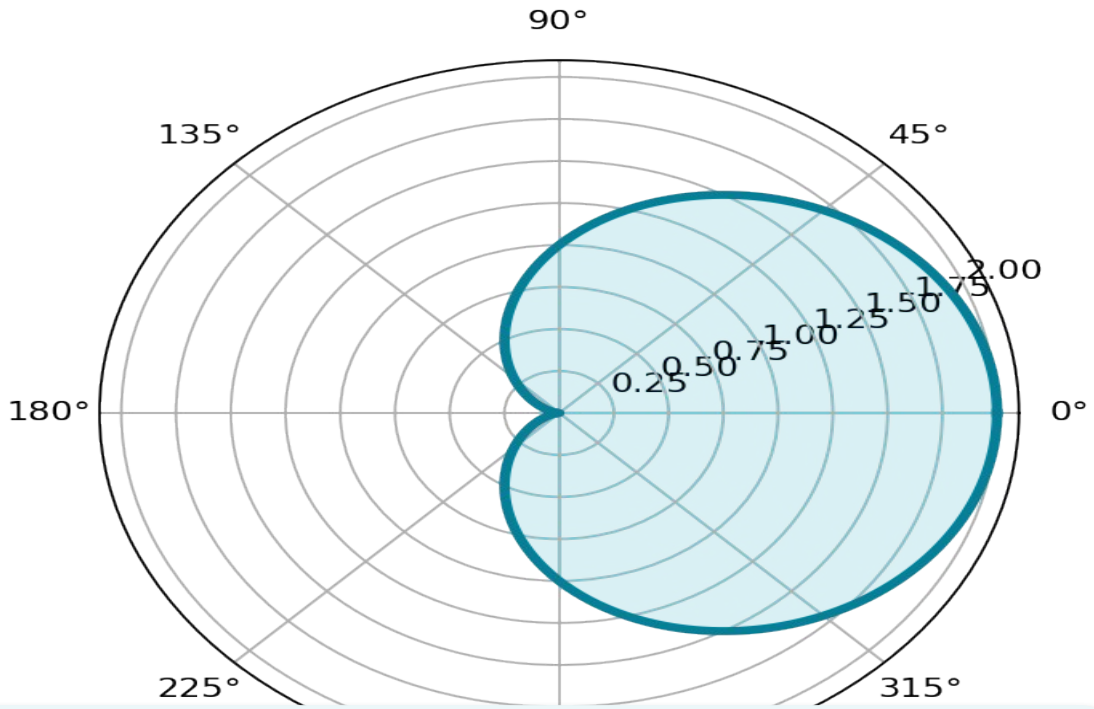
$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(f^2 + f'^2)}\, d\varphi$$

Пример 3. Длина кардиоиды

$\rho = a(1 + \cos\varphi)$, $a > 0$.

$\rho' = -a \sin\varphi$.

Подставляем в формулу полярной длины и используем тождество $2 + 2\cos\varphi = 4\cos^2(\varphi/2)$.



L = 8a

Объём тела по площади сечений

Пусть Q(x) — площадь поперечного сечения тела, перпендикулярного оси Ox.

Суммируем объёмы тонких слоёв и переходим к пределу.

$$V = \int_a^b Q(x)\,dx$$

Объёмы тел вращения

При вращении $y = f(x) \geq 0$ вокруг Ox сечение — круг радиуса $f(x)$.

При вращении вокруг Oy применим метод цилиндрических оболочек (при соответствующих условиях).

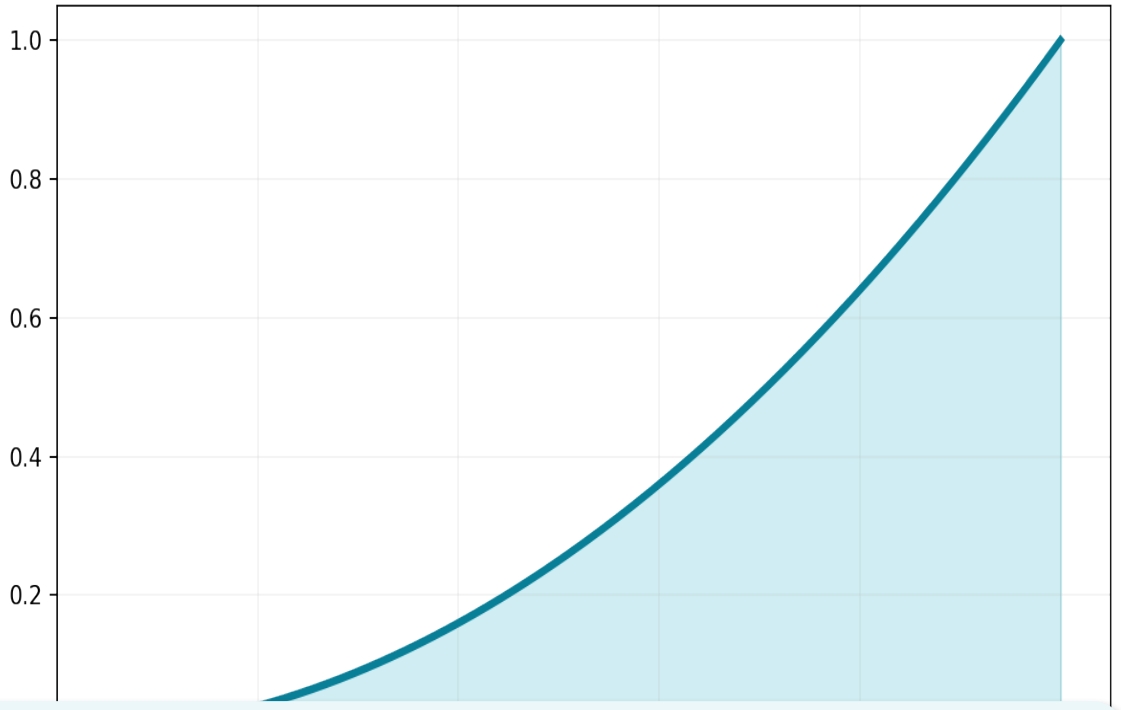
$$V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

$$V_y = 2\pi \int_a^b x \, f(x) \, dx$$

Пример 4. Вращение $y = x^2$

Вращаем область под параболой $y = x^2$, $0 \le x \le 1$, вокруг оси Ox.

Квадрат радиуса сечения: $(x^2)^2 = x^4$.



$$V = \pi \int_0^1 x^4 \, dx = \pi/5$$

Площадь поверхности вращения

Непрерывно дифференцируемая кривая $y = f(x) \geq 0$ вращается вокруг Ox.

Малый участок дуги образует узкий пояс поверхности.

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{(1 + [f'(x)]^2)}\, dx$$

Карта формул: что выбрать?

Площадь под графиком → интегрировать f(x).

Площадь в полярной форме → интегрировать $\frac{1}{2}\rho^2$.

Длина дуги → использовать корень из суммы квадратов.

Объём вращения → площадь сечения или оболочки.

Поверхность вращения → 2π × радиус × элемент длины.

Самопроверка

1. Чем геометрическая площадь отличается от интеграла?
2. Как рассчитать площадь эллипса через параметризацию?
3. Какова формула полярной площади?
4. Как найти длину кардиоиды?
5. Как находят объём вращения вокруг Ox и Oy?
6. Как вычисляют площадь поверхности вращения?

Литература

Н. Махмеджанов, Р. Н. Махмеджанова. Сборник задач по высшей математике (2009).

Н. М. Махмеджанов. Сборник заданий по высшей математике (2021).

Л. Д. Кудрявцев. Краткий курс математического анализа, т. 1–2 (2005).

Б. П. Демидович. Сборник задач по математическому анализу.