Производная функции и дифференциал

Геометрический и физический смысл · правила дифференцирования

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Цель: научиться вычислять производные и применять их для анализа изменений.

План лекции

- Приращение аргумента и функции. Определение производной.
- Дифференцируемость и непрерывность.
- Геометрический смысл: касательная. Физический смысл: скорость.
- Таблица производных и правила вычисления.
- Сложная и параметрическая функции. Дифференциал.
- Использование производных при вычислении пределов.

Приращение аргумента и функции

$$\Delta x = x - x_0$$

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Приращение аргумента — изменение x. Приращение функции — соответствующее изменение y.

Пример: для $f(x)=x^2$ при $x_0=2$ и $\Delta x=0{,}1$ получаем $\Delta y=0{,}41$.

Производная: определение

Производной функции в точке называется предел отношения приращения функции приращению аргумента.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Предел должен существовать и быть конечным. Производная характеризует локальную скорость изменения функции.

Пример по определению: f(x)=x²

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (2x+h) = 2x$$

В точке $x_0 = 3$: $f'(3) = 6$.

Дифференцируемость и непрерывность

- Функция дифференцируема в точке, если имеет конечную производную.
- Дифференцируемость в точке влечёт непрерывность в этой точке.
- Обратное утверждение неверно: |x| непрерывна при x = 0, но не дифференцируема.

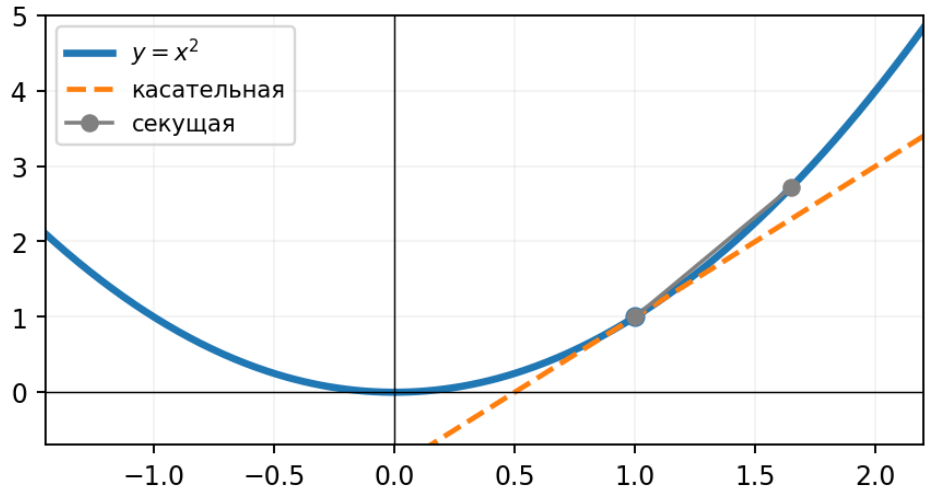
$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

Геометрический смысл производной

Производная — угловой коэффициент касательной к графику функции.

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x -$$

Секущая при Δx → 0 переходит в касательную.



Физический смысл производной

Если s(t) — координата или пройденный путь, мгновенная скорость равна производной по времени.

$$v(t) = s'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

Пример: $s(t)=5t^2 \Rightarrow v(t)=10t$; при $t=3$ с скорость равна 30 м/с.

Основные производные: степенная и показательная

$$(C)' = 0, \qquad (x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha - 1}$$

$$(a^{x})' = a^{x} \ln a, \qquad (e^{x})' = e^{x}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \qquad (\sin x)' = \cos x$$

Таблица тригонометрических производных

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Производные вычисляются на тех участках, где функции определены.

Правила: сумма, произведение, частное

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad v \neq 0$$

Пример: производная произведения

$$y = x^2 \sin x$$

$$y' = 2x \sin x + x^2 \cos x$$

Рекомендуемый порядок: выделить u, v; вычислить u′ и v′; применить правило; упростить.

Сложная функция: правило цепочки

Если y=f(u), u=g(x), то производная внешней функции умножается на производную внутренней.

$$\frac{dy}{dx} = f'(u)g'(x)$$

$$y = \sin(3x^2) \Rightarrow y' = 6x\cos(3x^2)$$

Параметрическое задание функции

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \quad \varphi'(t) \neq 0$$

Пример: $x=t^2$, $y=t^3 \Rightarrow dy/dx=3t^2/(2t)=3t/2$ при $t\neq0$.

Дифференциал и приближённые вычисления

Дифференциал — главная линейная часть приращения функции.

$$dy = f'(x)\,dx \qquad \Delta y \approx dy$$

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$$

Пример: приближённое значение sin 46°

Выбираем $x_0=45°$ и малое приращение $\Delta x=1°=\pi/180$ радиан.

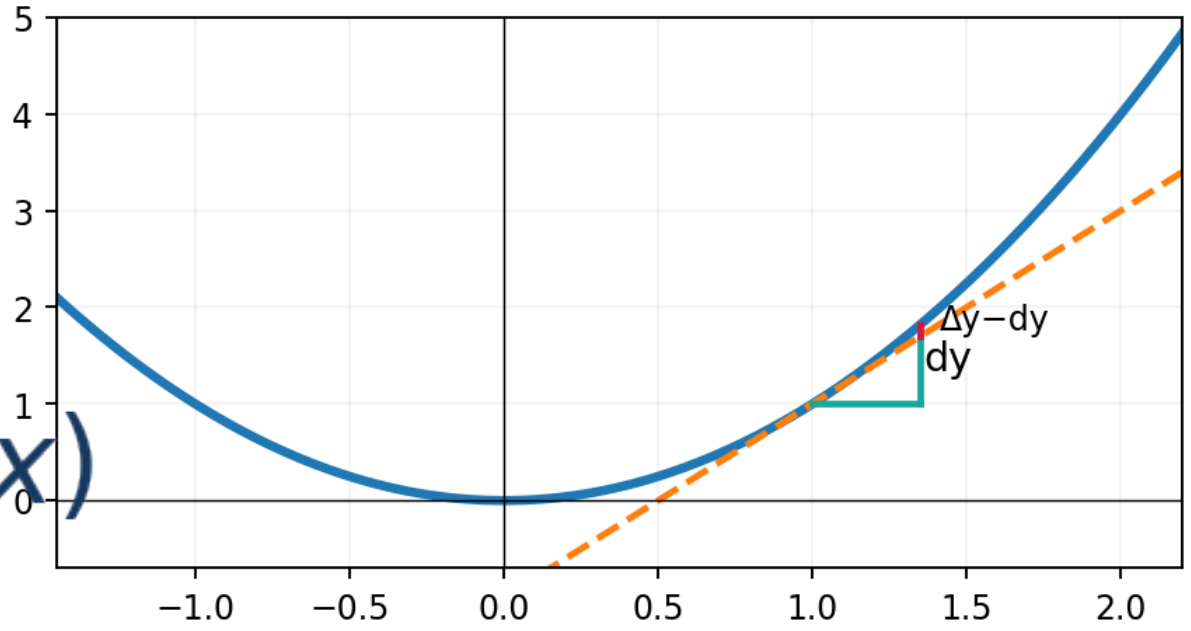
$$\sin 46^\circ \approx \sin 45^\circ + \cos 45^\circ \cdot \frac{\pi}{180}$$

Формулу дифференциала применяем с углами в радианах.

Геометрия дифференциала

dy — изменение вдоль касательной, Δy — истинное изменение функции.

$$\Delta y = dy + o(\Delta x)$$



Производные и неопределённости

Производные помогают исследовать пределы. Правило Лопиталя для форм 0/0 и ∞/∞ подробно рассматривается в лекции №10.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

При применении правил вычисления пределов необходимо проверять условия соответствующей теоремы.

Типичные ошибки

- Путаница между Δy и dy: это разные величины.
- Потеря производной внутренней функции в сложной функции.
- Применение формулы частного при v(x)=0.
- Отсутствие проверки существования производной в точке.
- Подстановка градусов вместо радиан при дифференцировании.

Практика для самостоятельной работы

1. $y = (2x + 1)^5$

2. $y = x^2 e^x$

3. $y = \frac{\sin x}{x}, \quad x \neq 0$

4. $x = t^2 + 1, \quad y = t^3 - t$

Вопросы для самоконтроля

- Как определяются приращения аргумента и функции?
- Что называют производной функции в точке?
- Каковы геометрический и физический смыслы производной?
- Как связаны дифференцируемость и непрерывность?
- Как найти производную сложной и параметрической функций?
- Что такое дифференциал и когда он полезен?

Итоги лекции

- Производная — предел отношения приращений.
- Геометрически производная определяет наклон касательной.
- Физически производная описывает мгновенную скорость.
- Основные инструменты: таблица производных, правила и цепочка.
- Дифференциал даёт линейное приближение изменения функции.

Следующая тема: монотонность, экстремумы и исследование функций.