Лекция 9. Исследование функций

Монотонность · Экстремумы · Выпуклость · Асимптоты

Исследование графика функции с помощью первой и второй производных

Цель занятия

Определять поведение функции и строить её график

по производным, пределам и асимптотам

План лекции

01 Возрастание и убывание функции

02 Критические точки и локальные экстремумы

03 Признаки по первой и второй производной

04 Выпуклость и точки перегиба

05 Вертикальные и наклонные асимптоты

06 Полная схема исследования функции

Монотонность функции

Строго возрастает

Для $x_1 < x_2$ выполняется

$f(x_1) < f(x_2)$

Строго убывает

Для $x_1 < x_2$ выполняется

$f(x_1) > f(x_2)$

Монотонность описывает направление изменения значений функции.

Знак производной и монотонность

Если $f'(x) > 0$ на интервале, функция строго возрастает.

Если $f'(x) < 0$ на интервале, функция строго убывает.

Если $f'(x) = 0$ на всём интервале, функция постоянна.

$$f'(x)>0\;\Rightarrow\;\nearrow\qquad f'(x)<0\;\Rightarrow\;\searrow$$

Что такое критическая точка?

Критическая точка — точка области определения функции,

в которой производная равна нулю или не существует.

$$f'(x_0)=0\quad\mathrm{или}\quad f'(x_0)\;\mathrm{не\ существует}$$

Важно

Не каждая критическая точка является экстремумом.

Критическая точка без экстремума

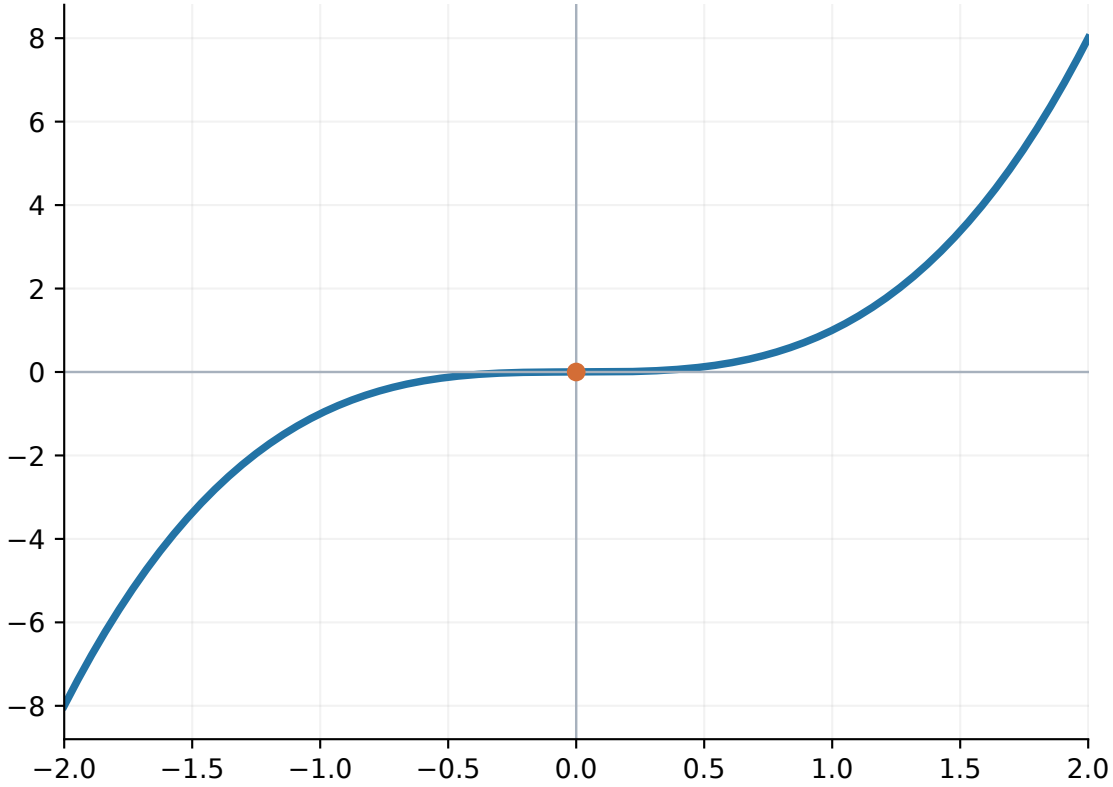
Пример: $f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$

$f'(0) = 0$

Но функция возрастает

по обе стороны от нуля.



Признак экстремума по первой производной

Максимум

f': $+ \to -$

Возрастание сменяется убыванием

Минимум

f': $- \to +$

Убывание сменяется возрастанием

Если знак не меняется

Экстремума нет.

Пример: монотонность и экстремумы

$f(x) = (x-1)x^{2/3}$

$f\prime(x) = \frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}$

Критические точки: 0 и 2/5

$(-\infty, 0)$: возрастает

(0, 2/5): убывает

(2/5, $+\infty$): возрастает

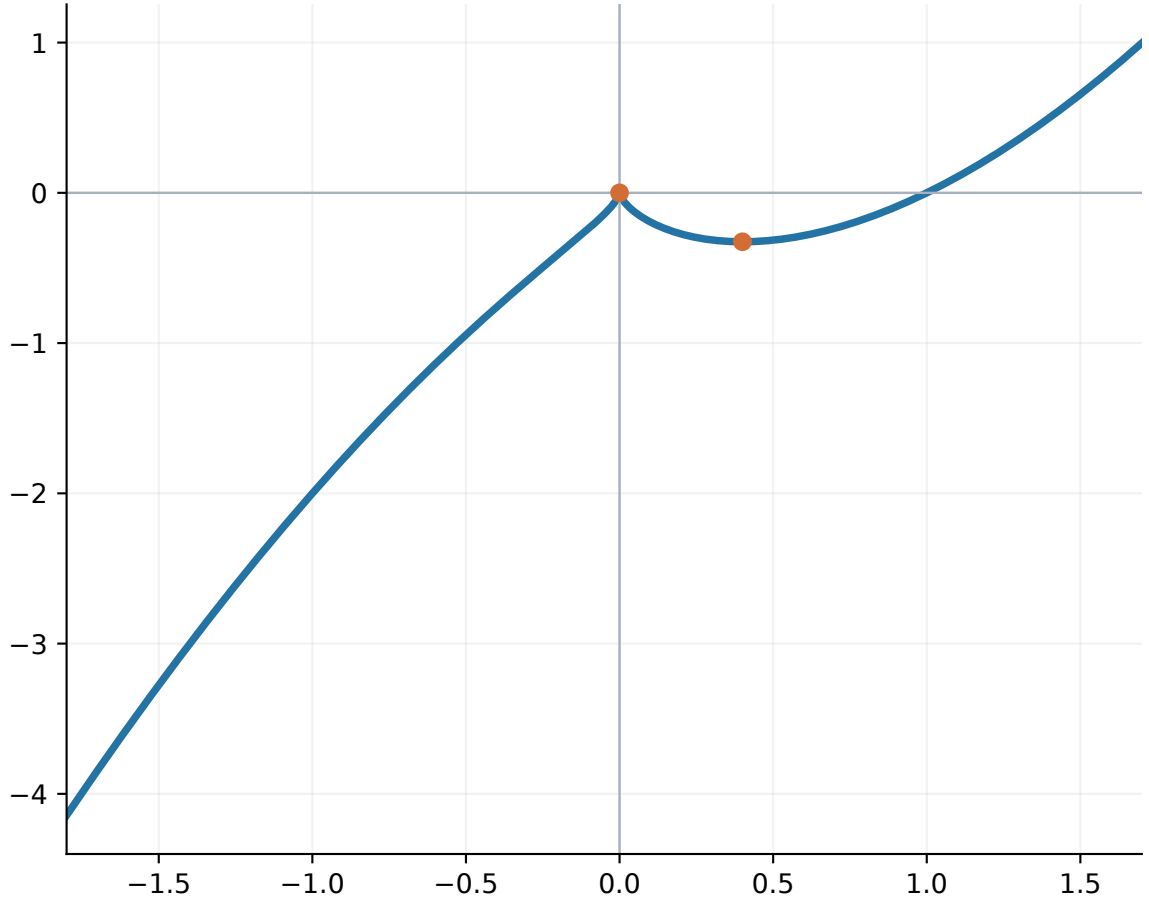


Таблица знаков для примера

Интервалы:	$(-\infty; 0)$	$(0; 2/5)$	$(2/5; +\infty)$
Знак f':	$+$	$-$	$+$
Поведение f:	↗	↘	↗

Вывод

x = 0 — локальный максимум; x = 2/5 — локальный минимум.

Признак экстремума по второй производной

$$f'(x_0)=0,\qquad f''(x_0)>0\ \Rightarrow\ \min$$

$$f'(x_0)=0,\qquad f''(x_0)<0\ \Rightarrow\ \max$$

Ограничение

Если $f''(x_0) = 0$, этот признак не даёт ответа.

Пример: экстремумы на отрезке

$f(x) = x^3 - 3x + 3, \qquad x \in [-2, 3]$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \;\Rightarrow\; x = \pm 1$$

$$f''(x) = 6x$$

$$f''(-1) = -6 < 0 \;\Rightarrow\; \textit{максимум}$$

$$f''(1) = 6 > 0 \;\Rightarrow\; \textit{минимум}$$

Значения в кандидатах

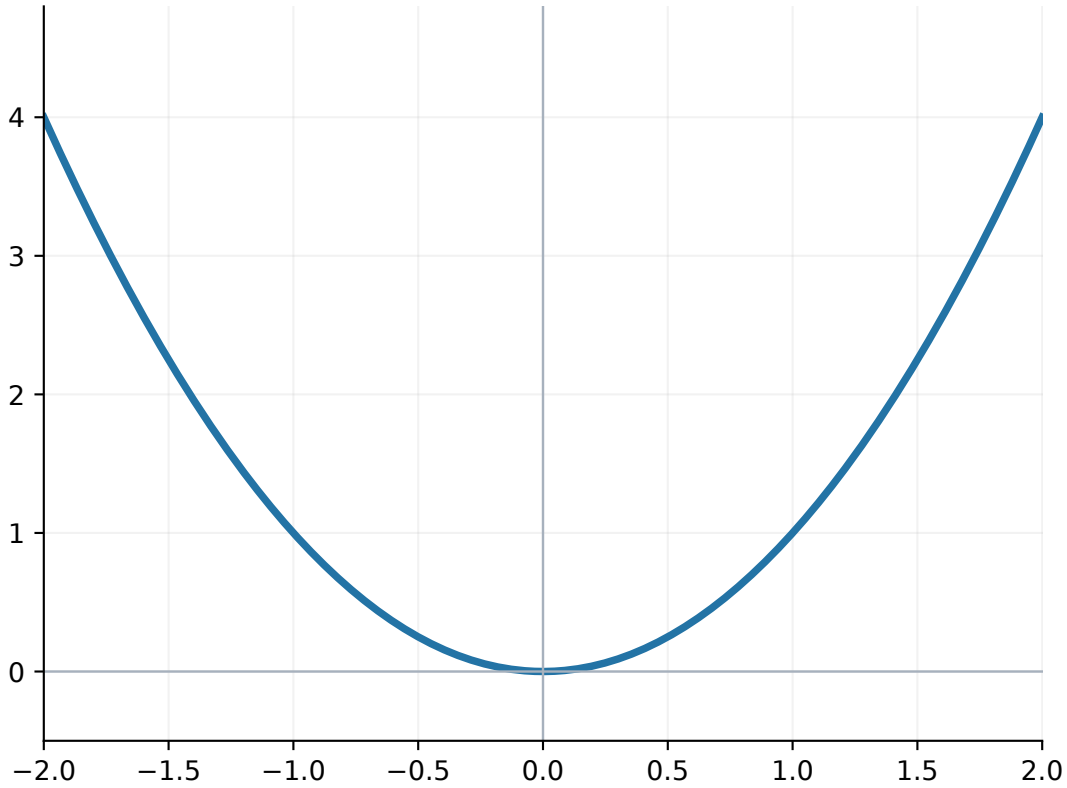
f(−2) = 1, f(−1) = 5, f(1) = 1, f(3) = 21

Абсолютный максимум = 21; абсолютный минимум = 1

Выпуклость: роль второй производной

$f''(x) > 0$: график расположен выше своих касательных (выпуклость вниз).

$f''(x) < 0$: график расположен ниже касательных (выпуклость вверх).

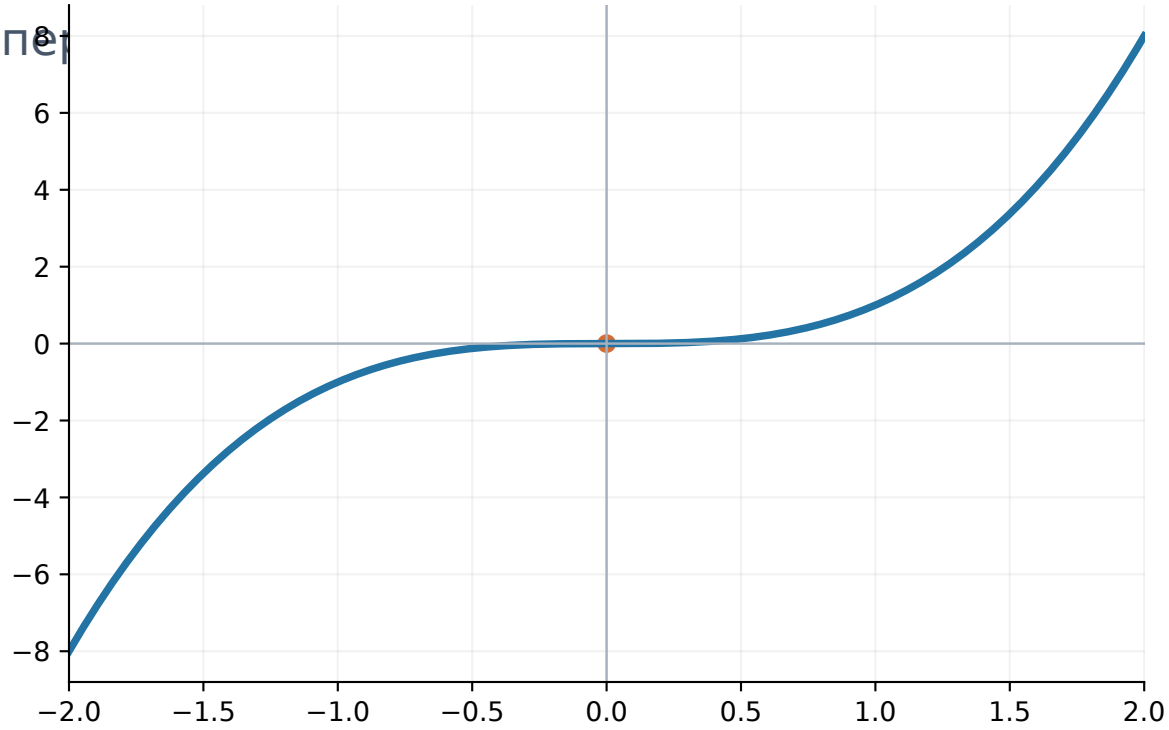


Точка перегиба

В точке перегиба меняется направление выпуклости.

Достаточный признак: f″ меняет знак при пер

$$f(x)=x^3,\quad f''(x)=6x$$



f″(x₀) = 0 — ещё не точка перегиба

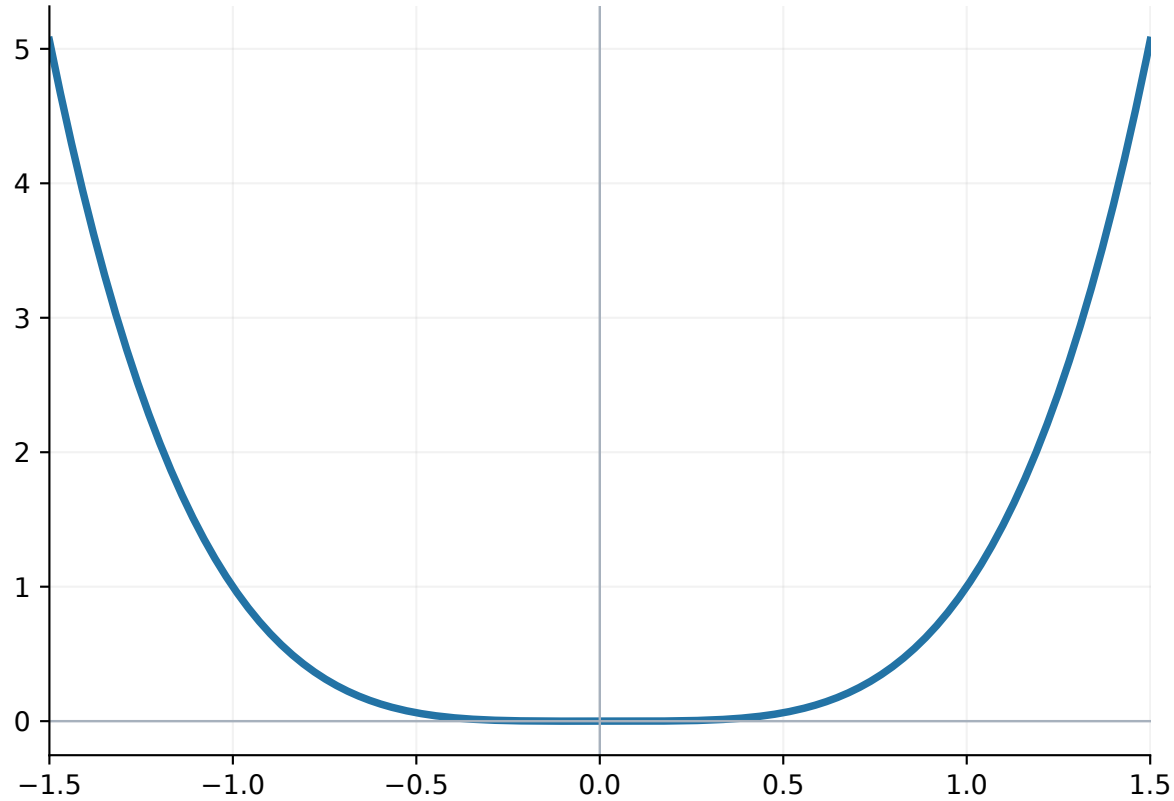
$f(x) = x^4$

$f''(x) = 12x^2 \geq 0$

В точке x = 0: f″(0) = 0

Направление выпуклости

не меняется.



Асимптоты графика функции

Вертикальная

Уравнение $x = x_0$

При $x \to x_0 \pm$ функция

становится бесконечно большой

Наклонная

Уравнение $y = kx + b$

Включает горизонтальные

асимптоты при $k = 0$

Для левого и правого направления асимптоты могут различаться.

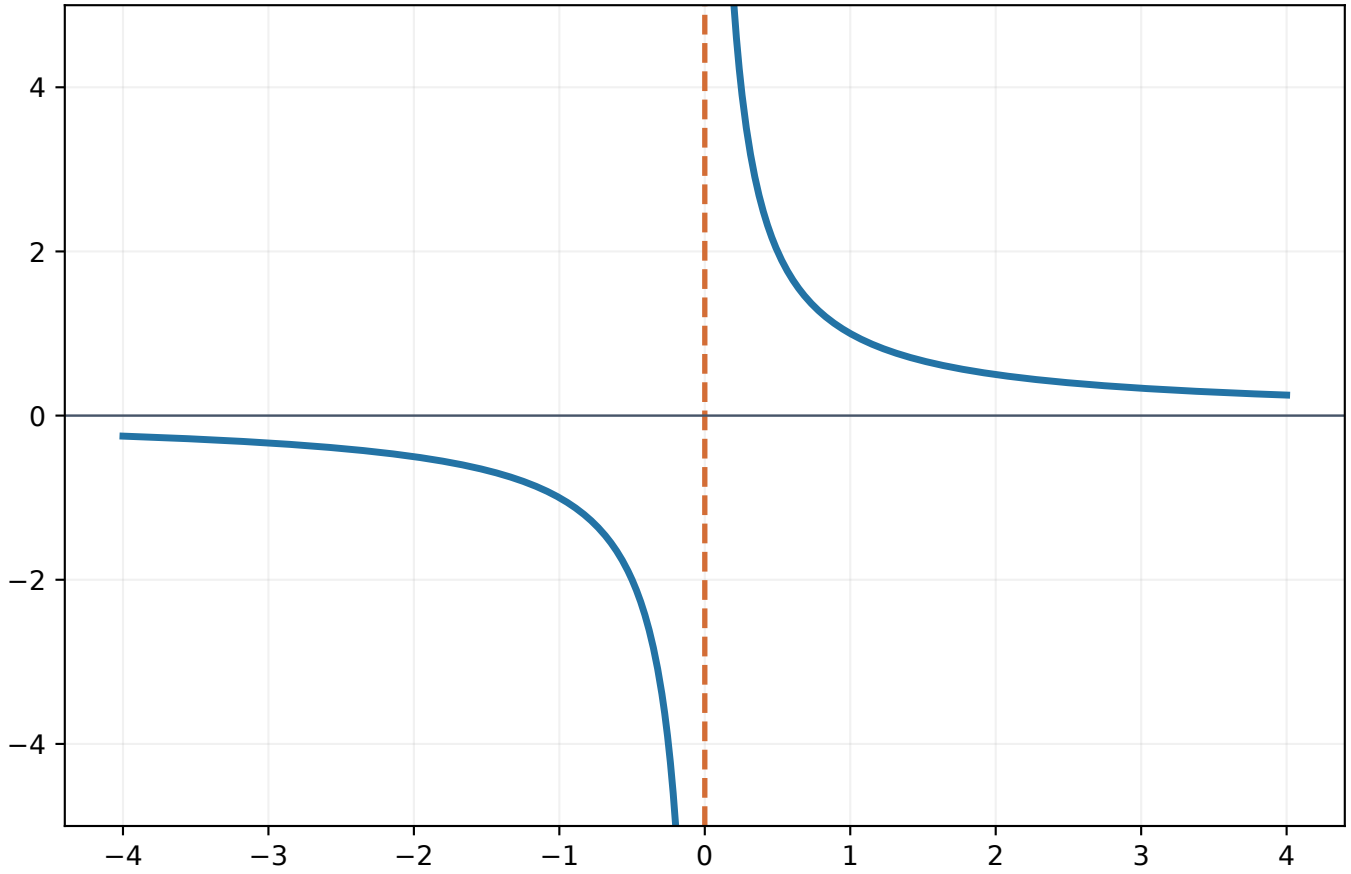
Вертикальная асимптота: y = 1/x

При $x \to 0-$: $f(x) \to -\infty$

При $x \to 0+$: $f(x) \to +\infty$

Вертикальная: $x = 0$

Горизонтальная: $y = 0$



Как найти наклонную асимптоту?

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)$$

Обязательное условие

Оба предела должны быть конечными; исследуйте $\pm\infty$ отдельно.

Пример наклонной асимптоты

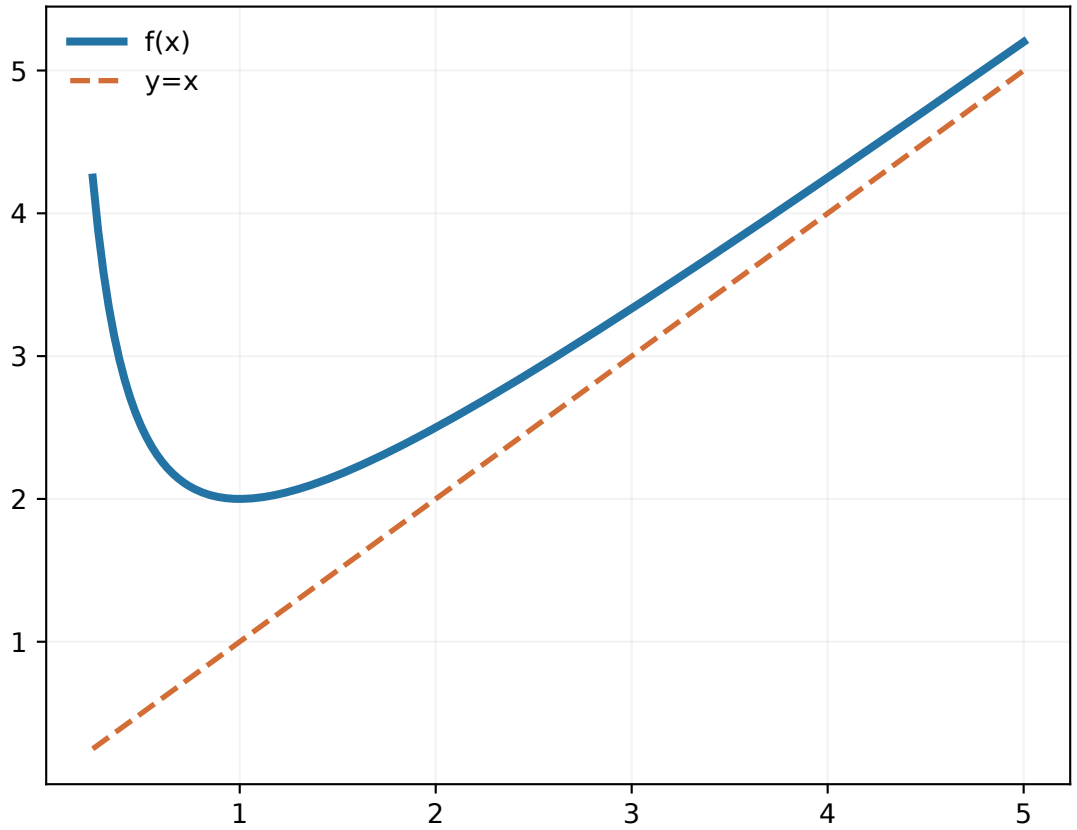
$f(x) = x + \frac{1}{x}$

$$k = \lim_{x \to +\infty} (1 + 1/x^2) = 1$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} 1/x = 0$$

Наклонная асимптота:

y = x



Алгоритм полного исследования функции

1. Область определения; симметрия и пересечения с осями.
2. Непрерывность и пределы в особых точках.
3. Вертикальные и наклонные асимптоты.
4. Первая производная: монотонность и экстремумы.
5. Вторая производная: выпуклость и перегибы.
6. Таблица знаков и характерных значений.
7. Построение графика и проверка результата.

Практика для самостоятельной работы

Исследуйте функцию полностью и постройте её график:

A. $f(x) = x^3 - 3x$

B. $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 2)$

C. $f(x) = x^4 - 2x^2$

Для каждого случая найдите критические точки,

интервалы монотонности, перегибы и асимптоты.

Вопросы для самоконтроля

- Как знак f' связан с возрастанием и убыванием?
- Всякая ли критическая точка — экстремум?
- Как различить максимум и минимум?
- Когда f'' позволяет установить наличие экстремума?
- Как определить точку перегиба?
- Какие существуют типы асимптот?
- Как построить полную схему исследования функции?

Основные выводы

Первая производная

Определяет монотонность и помогает находить экстремумы.

Вторая производная

Определяет выпуклость, перегибы и тип стационарной точки.

Пределы позволяют находить асимптоты и строить точный эскиз.