НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Лекция №11 · Математический анализ

Первообразная • таблица интегралов • методы интегриро

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Цель занятия

Научиться находить первообразные и выбирать подходящий способ интегрирования.

План лекции

- Понятие первообразной и неопределённого интеграла
- Основные свойства неопределённого интеграла
- Таблица базовых интегралов
- Замена переменной и подведение под знак дифференциала
- Интегрирование по частям
- Проверка результата дифференцированием

Первообразная: определение

Функция F(x) называется первообразной для f(x) на интервале, если её производная равна f(x) в каждой точке интервала.

$$F'(x) = f(x)$$

Пример: f(x) = x²

Первообразные отличаются только постоянной: C ∈ ℝ.

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + C, \quad F\prime(x) = x^2$$

Неопределённый интеграл

Неопределённый интеграл — множество всех первообразных функции.

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Почему нужна C?

Производная константы равна нулю.

Геометрический смысл

Все первообразные — вертикальные сдвиги графика.

Проверка интегрирования

Для проверки достаточно продифференцировать найденный ответ.

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x + C) = \cos x$$

Правило самопроверки

Если производная результата совпала с подынтегральной функцией, ответ верен.

Свойства неопределённого интеграла

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$$

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + C$$

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx \quad (k \neq 0)$$

$$\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

Постоянная интегрирования в итоговом ответе записывается одна.

Таблица интегралов: степенные функции

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0,\ a \neq 1$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

Таблица интегралов: тригонометрия I

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$$

Таблица интегралов: тригонометрия II

$$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln|\tan(x/2)| + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln|\tan(x/2 + \pi/4)| + C$$

Таблица интегралов: обратные функции

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a + x}{a - x}\right| + C$$

Ограничения области определения учитываются при вычислении.

Интегралы гиперболических функций

$$\int \sinh x \, dx = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x \, dx = \sinh x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x + C$$

Метод замены переменной

Подстановка переводит исходный интеграл в более простой.

$$u = g(x), \quad du = g'(x)\,dx$$

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

Алгоритм

Выбрать u → выразить du → вычислить интеграл → вернуться к x → добавить C.

Замена переменной: пошаговый пример

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}+1}$$

$$t = \sqrt{2x+1}, \quad x = \frac{t^2-1}{2}, \quad dx = t\,dt$$

$$I = \int \frac{t}{t+1}\,dt = \int \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt$$

$$I = t - \ln|t+1| + C$$

$$I = \sqrt{2x+1} - \ln(\sqrt{2x+1}+1) + C$$

Подведение под знак дифференциала

Узнаём производную сложной функции в подынтегральном выражении.

$$d(x^2+1) = 2x\,dx$$

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

Проверка

Производная ответа равна x/(x² + 1).

Интегрирование по частям

Метод основан на формуле производной произведения.

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Выбор u

Удобно взять функцию, которая упрощается при дифференцировании.

Выбор dv

Оставшуюся часть можно непосредственно проинтегрировать.

По частям: интеграл от arctg x

$$I = \int \arctan x \, dx$$

$$u = \arctan x, \quad dv = dx$$

$$du = \frac{dx}{1+x^2}, \quad v = x$$

$$I = x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\, dx$$

$$I = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

По частям: интеграл x cos x

$$I = \int x\cos x\,dx$$

$$u = x, \quad du = dx$$

$$dv = \cos x\,dx, \quad v = \sin x$$

$$I = x\sin x - \int \sin x\,dx$$

$$I = x\sin x + \cos x + C$$

Как выбрать метод интегрирования?

Табличный интеграл

Сразу примените известную формулу.

Сложная функция

Попробуйте замену переменной.

Есть производная внутри

Подведите выражение под знак d.

Произведение функций

Рассмотрите интегрирование по частям.

Всегда завершайте проверкой через производную.

Задания для самостоятельной работы

1. $\int (3x^2 + 2x - 5)\,dx$
2. $\int \sin(2x + 3)\,dx$
3. $\int \frac{2x}{x^2 + 4}\,dx$
4. $\int x e^x\,dx$
5. $\int \ln x\,dx$

Вопросы для самоконтроля

- Что называют первообразной и неопределённым интегралом?
- Почему в ответе присутствует произвольная постоянная C?
- Какие основные свойства интеграла вы знаете?
- Как выполнить замену переменной?
- Что означает подведение под знак дифференциала?
- Как вывести и применить формулу интегрирования по частям?

Литература и итоги

- Махмеджанов Н., Махмеджанова Р. Н. Сборник задач по высшей математике.
- Н. М. Махмеджанов. Сборник заданий по высшей математике.
- Л. Д. Кудрявцев. Краткий курс математического анализа.
- Демидович. Сборник задач по математическому анализу.

Главный вывод

Интегрирование — обратная операция дифференцирования; выбор метода зависит от вида функции.