Лекция № 7

Понятие функции одной переменной. Предел последовательности и функции. Теоремы о пределах. Непрерывность и точки разрыва.

Учебная презентация по материалам лекции (14 страниц)

Цели и структура лекции

- Научиться задавать функцию, определять область определения и множество значений.
- Понимать предел числовой последовательности и функции, в том числе односторонние пределы.
- Применять теоремы о пределах и замечательные пределы.
- Исследовать непрерывность и классифицировать точки разрыва.

Множества и математические обозначения

Множества и промежутки

- Принадлежность: $x \in A$; пустое множество: $\varnothing$.
- Подмножество: $A \subset B$.
- Отрезок $[a, b]$, интервал (a, b).
- Окрестность точки: $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

Логические символы

- $\forall$ — для любого (квантор общности).
- $\exists$ — существует (квантор существования).
- $\Rightarrow$ — следует; $\Leftrightarrow$ — эквивалентно.
- Ограниченность: $|x| \leq M$ для $x \in A$.

Функция одной переменной

$$f : D \to E, \quad x \mapsto y = f(x)$$

- Каждому аргументу x из области определения D соответствует ровно одно значение f(x).
- Область определения — множество допустимых значений аргумента.
- Область значений — множество значений, которые принимает функция.

Пример: для f(x) = √(x − 1) область определения D = [1, +∞).

Свойства и способы задания функции

Основные свойства

- Монотонность: возрастание / убывание.
- Чётность: $f(-x) = f(x)$.
- Нечётность: $f(-x) = -f(x)$.

Способы задания

- Явно: $y = f(x)$.
- Неявно: $F(x, y) = 0$.
- Параметрически: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$.

Сложная функция: $F(t) = f(\varphi(t))$. Обратная функция существует при взаимно однозначном соответствии.

Числовая последовательность

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad x_n = f(n)$$

- Последовательность — функция натурального аргумента.
- x_1, x_2, …, x_n — члены последовательности; n — номер.
- Предел a означает, что все достаточно поздние члены сколь угодно близки к a.

Пример: $x_n = 1/n \to 0$ при $n \to \infty$.

Предел последовательности: определение

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a$$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N : \; n \geq N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

Геометрический смысл

Вне ε-окрестности предела может находиться только конечное число членов последовательности.

Предел последовательности: пример

$$x_n = \frac{1}{n}, \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Доказательство через ε:

Для любого ε > 0 выберем натуральное N > 1/ε. Тогда при n ≥ N:

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

Предел функции в точке

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

Значение f(a) может отсутствовать или не совпадать с A.

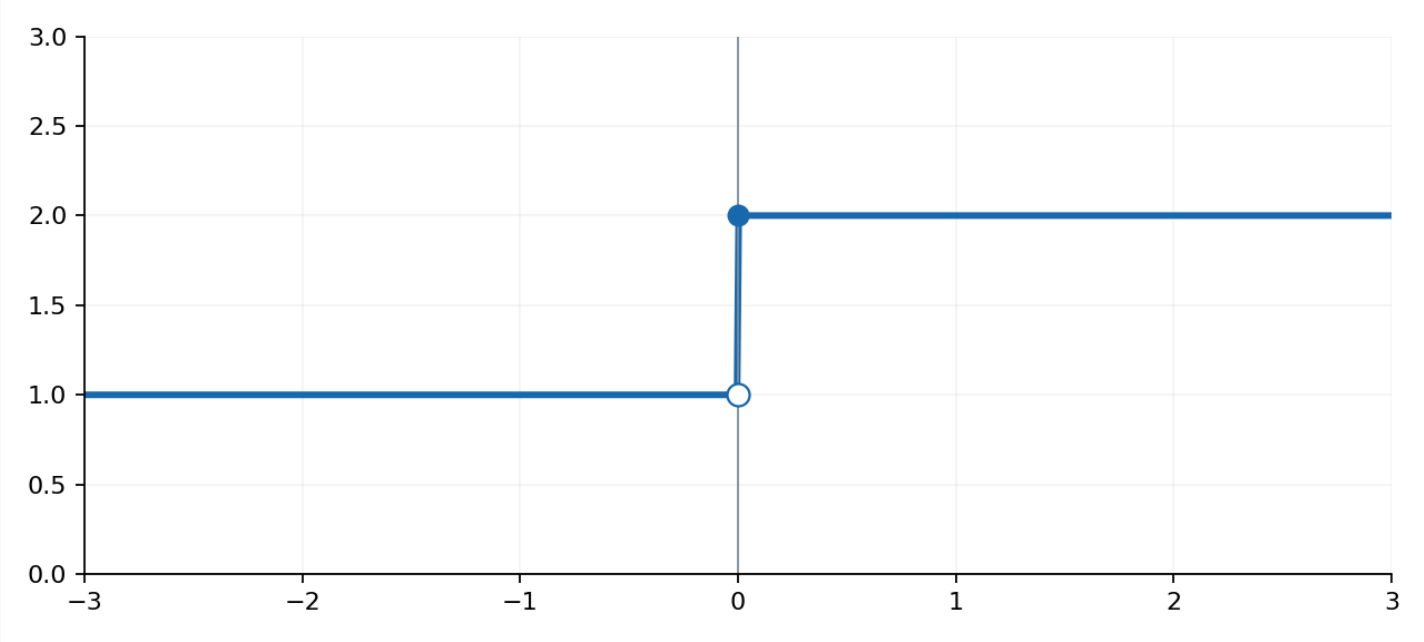
Идея: при приближении x к a значения функции приближаются к A.

Односторонние пределы

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = A_-, \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = A_+$$

- Левый предел: x приближается к a со стороны меньших значений.
- Правый предел: x приближается к a со стороны больших значений.
- Двусторонний конечный предел существует тогда и только тогда, когда оба односторонних предела существуют и равны.

Пример: односторонние пределы



$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 2$$

Двустороннего предела нет.

Основные свойства пределов

$$\lim(f \pm g) = A \pm B$$

$$\lim(fg) = AB$$

$$\lim \frac{f}{g} = \frac{A}{B}, \quad B \neq 0$$

Предел константы равен константе; если конечный предел существует, он единственен.

Теорема о зажатой функции

$$f(x) \le g(x) \le h(x)$$

$$\lim f(x) = \lim h(x) = A \Rightarrow \lim g(x) = A$$

Если верхняя и нижняя оценки стремятся к одному числу, то функция между ними имеет тот же предел.

Бесконечно малые и большие

Бесконечно малая

$$\alpha(x) \to 0$$

Сумма конечного числа бесконечно малых — бесконечно малая.

Бесконечно большая

$$|F(x)| \to \infty$$

Если F(x) бесконечно большая и не равна 0, то 1/F(x) → 0.

Эквивалентность: α(x) ~ β(x), если α(x)/β(x) → 1.

Первый замечательный предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Следствие для k ≠ 0:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(kx)}{x} = k$$

Пример из лекции: lim sin(2x)/sin(3x) = 2/3 при x → 0.

Второй замечательный предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$$

Число Эйлера: e ≈ 2,71828.

Пример второго замечательного предела

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x+3}\right)^{3x+2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{2x+3}\right)^{3x+2}=e^{-3}$$

Результат: e^{-3}.

Эквивалентные бесконечно малые

$$\sin x \sim x, \quad \tan x \sim x, \quad \ln(1+x) \sim x$$

$$e^x - 1 \sim x, \qquad (1+x)^a - 1 \sim ax$$

Эти соотношения применяются при $x \to 0$ и помогают упрощать отношения в пределах.

Непрерывность в точке

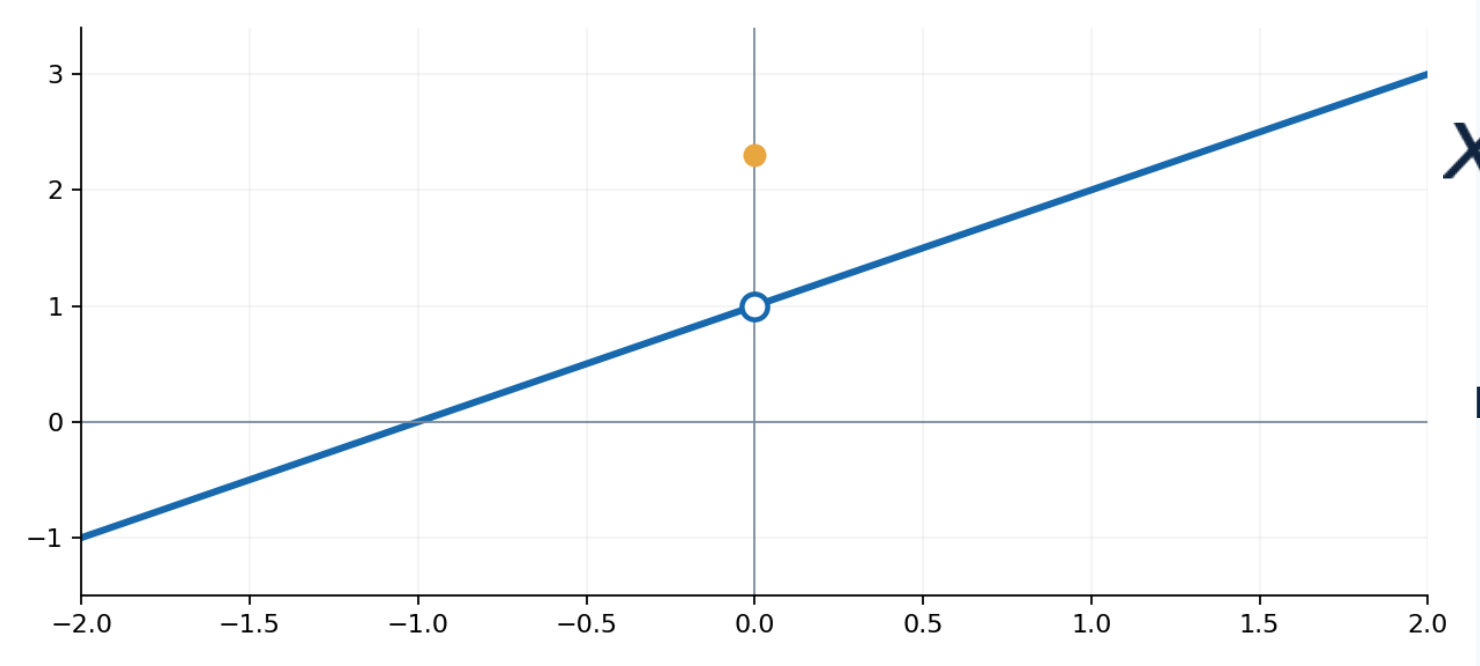
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

- $f(x_0)$ определено.
- Существует конечный предел $f(x)$ при $x \to x_0$.
- Предел совпадает со значением функции в точке.

Три вида точек разрыва

- Устранимый: общий конечный предел существует, но значение в точке отсутствует или отличается от предела.
- Разрыв I рода (скачок): оба односторонних предела конечны, но не совпадают.
- Разрыв II рода: хотя бы один односторонний предел бесконечен либо не существует.

Устранимый разрыв: пример



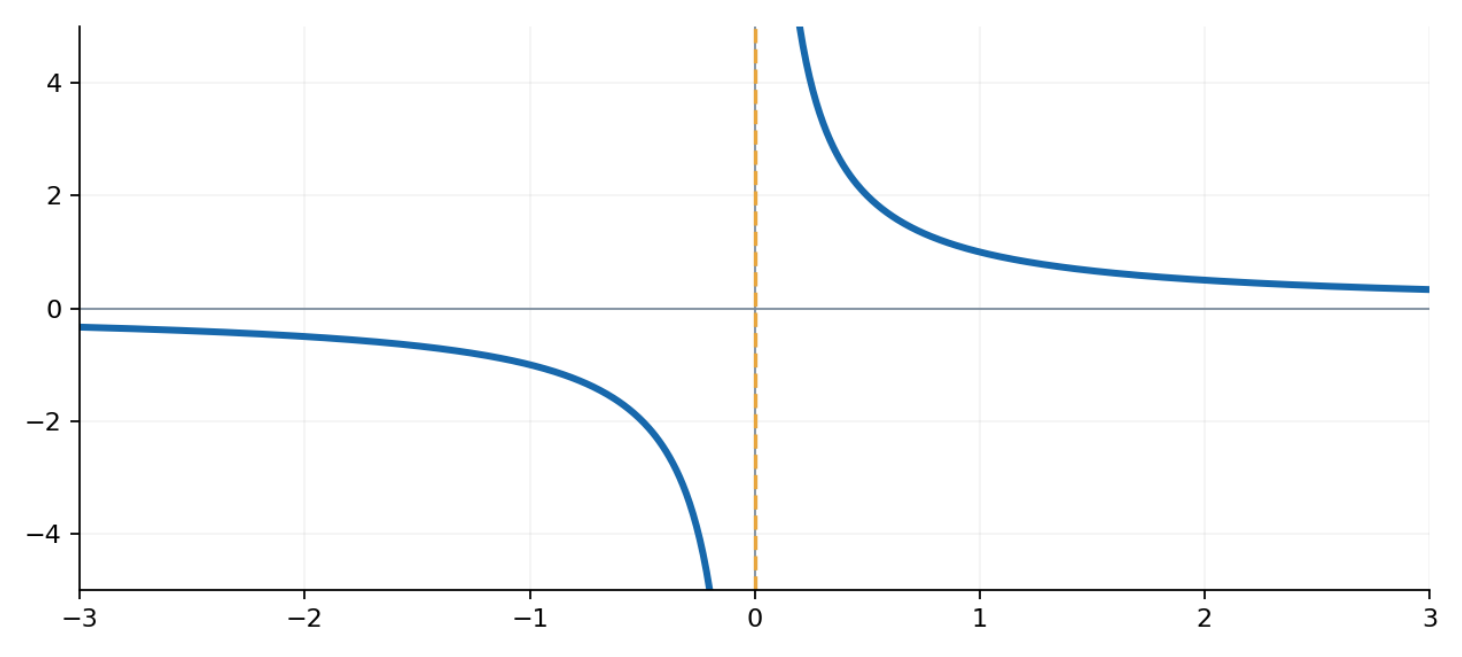
$x) = x + 1 \quad (x \neq ($

Пусть f(0) = 2,3.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

Изменив f(0) на 1, устраняем разрыв.

Разрыв II рода: пример



$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Теоремы Больцано–Коши

- Если f непрерывна на [a, b] и f(a)·f(b) < 0, то существует c ∈ (a, b) с f(c) = 0.
- Непрерывная функция на [a, b] принимает все промежуточные значения между f(a) и f(b).
- Первая теорема лежит в основе метода половинного деления для поиска корня уравнения.

Теоремы Вейерштрасса

- Если функция непрерывна на замкнутом отрезке [a, b], то она ограничена на этом отрезке.
- Если функция непрерывна на [a, b], то она достигает там наибольшего и наименьшего значений.
- На незамкнутых или неограниченных промежутках такие выводы без дополнительных условий неверны.

Алгоритм исследования непрерывности

- 1. Найти область определения функции.
- 2. Выделить точки, где формула меняется либо выражение не определено.
- 3. Вычислить пределы слева и справа.
- 4. Сравнить их со значением функции (если оно есть).
- 5. Указать тип разрыва и возможность его устранения.

Вопросы для самоконтроля

- Что такое функция, область определения и область значений?
- Как формулируются определения предела последовательности и функции?
- Когда существует общий предел по односторонним пределам?
- Запишите два замечательных предела.
- Назовите три типа разрывов и сформулируйте теоремы Больцано–Коши и Вейерштрасса.

Источники и завершение

Основа презентации: «Л 7. Понятие функции одной переменной. Предел последовательности и функции. Теоремы о пределах функций. Понятия непрерывности функций. Точки разрыва функции», предоставленная лекция, 14 страниц.

Литература из лекции:

- Л. Д. Кудрявцев. Краткий курс математического анализа.
- Б. П. Демидович. Сборник задач по математическому анализу.
- Н. Махмеджанов, Р. Н. Махмеджанова. Сборник задач по высшей математике.