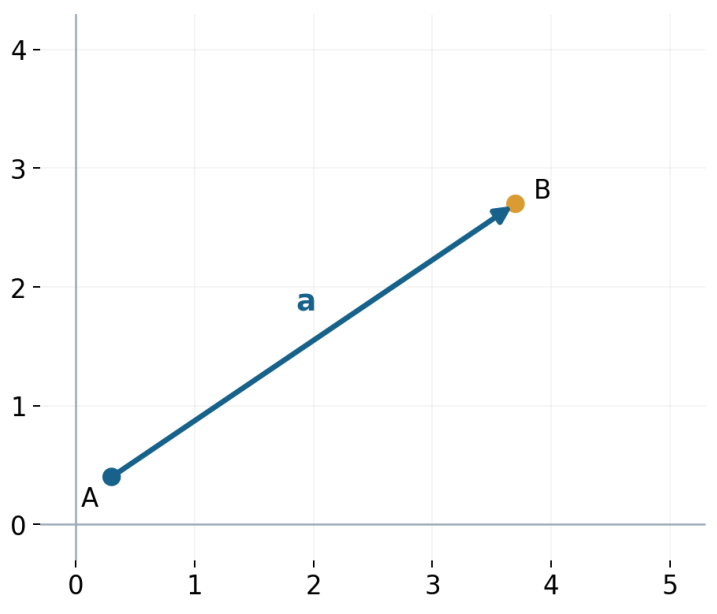
Понятие вектора. Координаты. Линейное пространство

Лекция №3

Векторы и операции над ними. Линейная зависимость и базис. Декартовы и полярные координаты. Проекции и расстояния.



Цель и план лекции

Цель: научиться работать с векторами, задавать их координаты и понимать базис линейного пространства.

Вопросы: операции над векторами; линейная зависимость; базис и размерность; декартова и полярная системы координат; проекции; расстояние между точками.

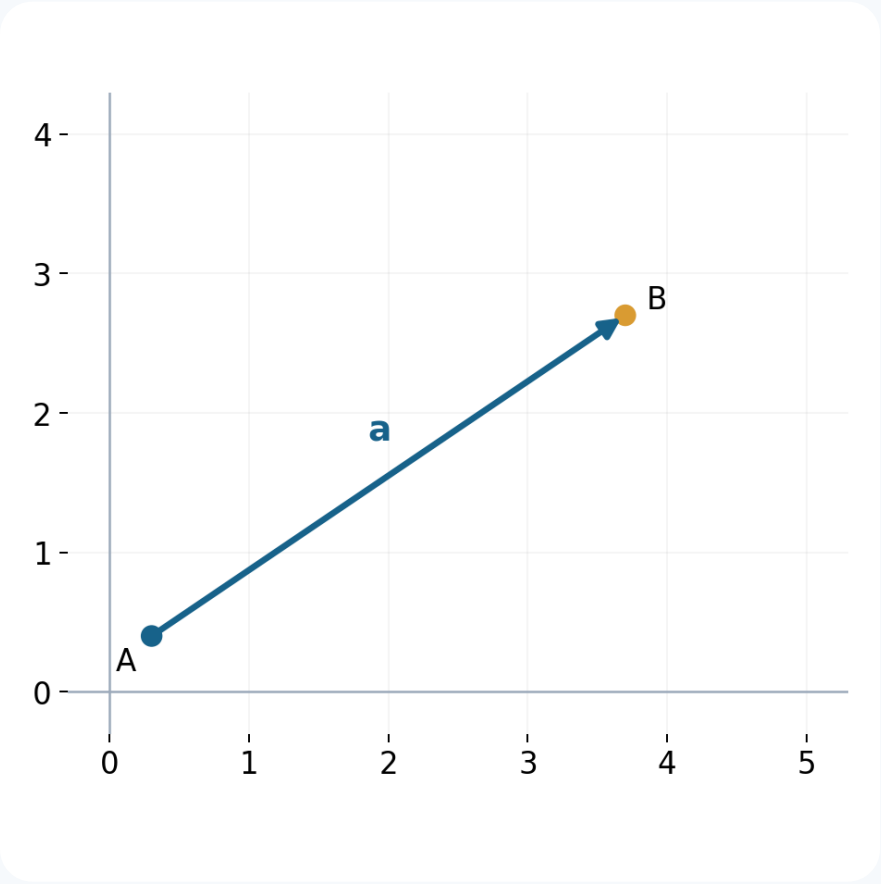
Что называется вектором?

Вектор — направленный отрезок с началом A и концом B.

Модуль вектора — длина соответствующего отрезка.

Нулевой вектор имеет совпадающие начало и конец.

Векторы равны, если одинаковы их длины и направления.

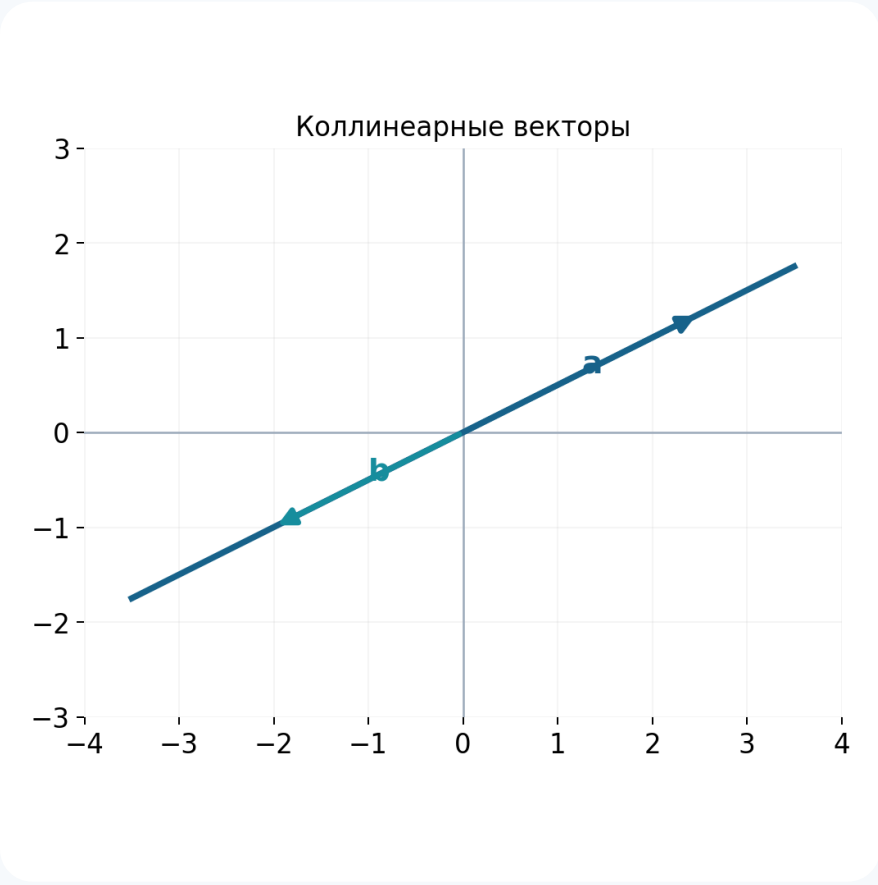


Коллинеарность и компланарность

Коллинеарные векторы лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Компланарные векторы лежат в одной плоскости либо в параллельных плоскостях.



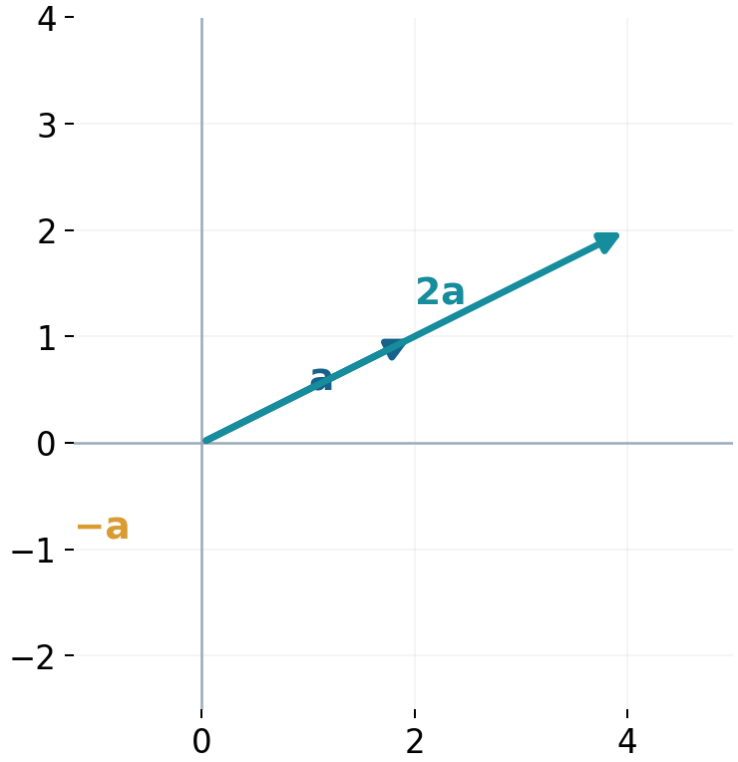
Умножение вектора на число

При умножении вектора a на число λ его длина меняется в |λ| раз.

При λ > 0 направление сохраняется, при λ < 0 становится противоположным.

При λ = 0 получается нулевой вектор.

$$|\lambda a| = |\lambda| \cdot |a|$$

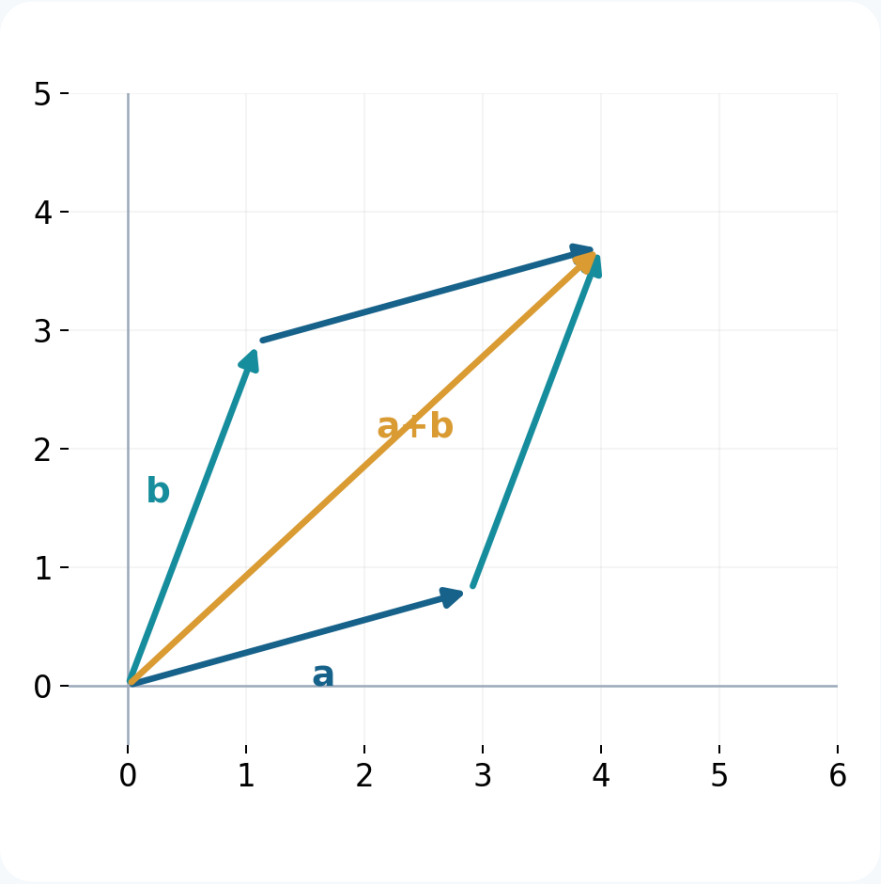


Сложение векторов

Правило параллелограмма: сложение двух векторов с общим началом даёт диагональ построенного параллелограмма.

Правило треугольника: второй вектор откладывают от конца первого.

Разность векторов: $a - b = a + (-b)$.



Свойства линейных операций

Коммутативность: $a + b = b + a$.

Ассоциативность: $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Дистрибутивность: $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$.

Сочетание коэффициентов: $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$.

Также $a + 0 = a$ и $1a = a$.

Линейная комбинация векторов

Линейная комбинация векторов $a_1, \ldots, a_n$ — сумма этих векторов с числовыми коэффициентами.

Если векторы коллинеарны одной прямой, то их линейная комбинация также коллинеарна ей.

Если векторы компланарны плоскости, их линейная комбинация остаётся в этой плоскости.

$$c_1a_1 + c_2a_2 + \ldots + c_na_n$$

Линейная зависимость

Векторы линейно зависимы, если существует равная нулю линейная комбинация с коэффициентами, не все из которых нулевые.

Если нулевая комбинация возможна лишь при всех нулевых коэффициентах, векторы линейно независимы.

$$c_1a_1 + \ldots + c_na_n = 0$$

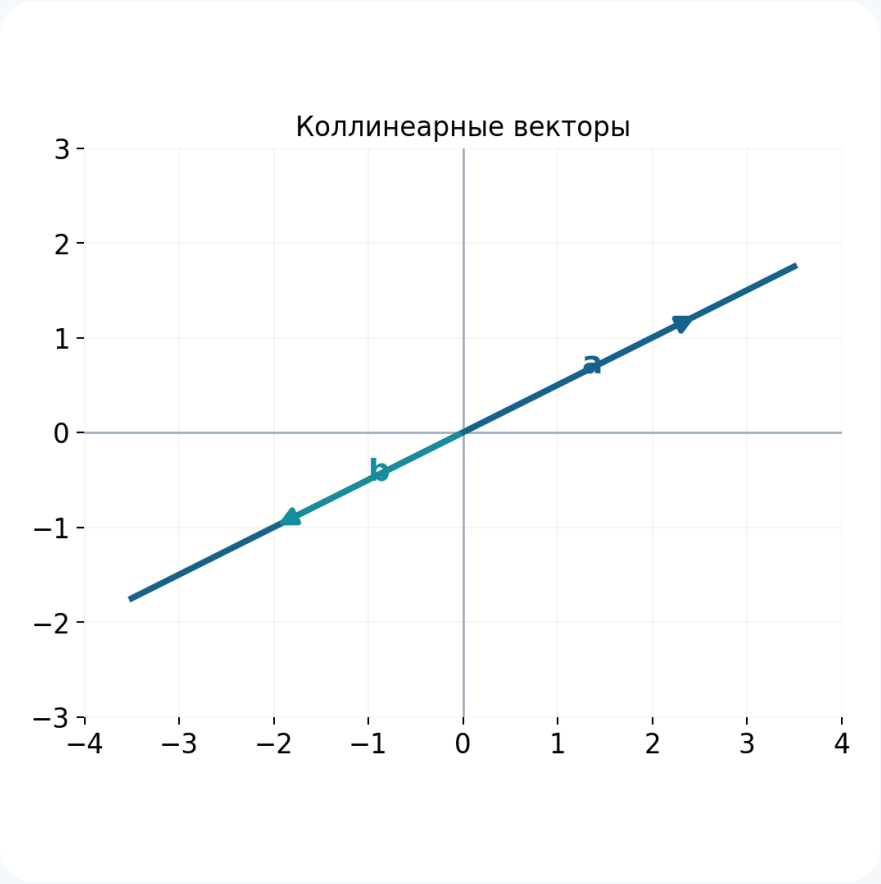
Пример линейной зависимости

Пусть a = (1, 2) и b = (2, 4).

Тогда b = 2a, поэтому 2a − b = 0.

Коэффициенты 2 и −1 не равны одновременно нулю.

Вывод: a и b линейно зависимы.



Линейное пространство

Векторное (линейное) пространство — множество элементов, для которых определены сложение и умножение на число, удовлетворяющие основным аксиомам.

Примеры: множество всех геометрических векторов плоскости и пространство координатных векторов.

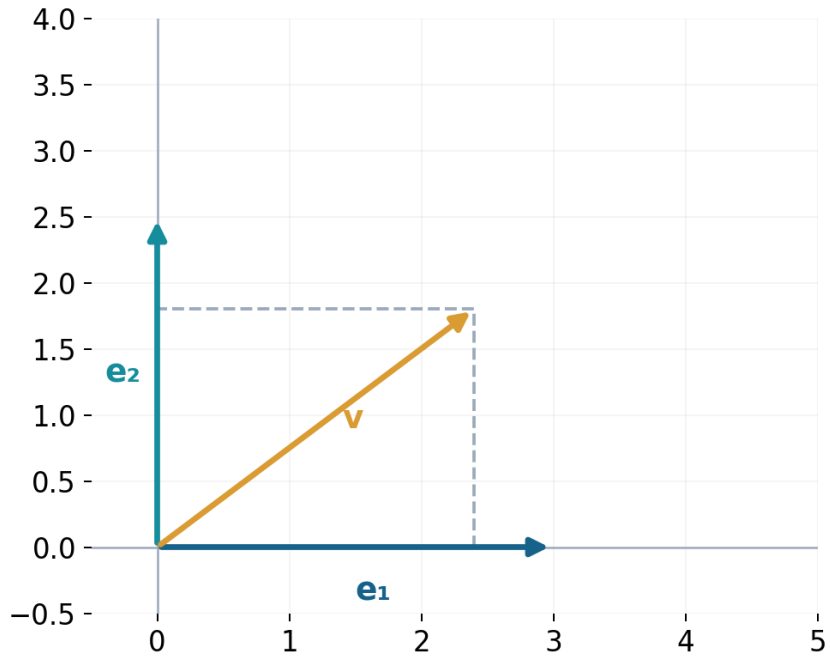
Базис позволяет однозначно представлять любой вектор через линейную комбинацию.

Базис и размерность

Базис — линейно независимая система векторов, через которую можно выразить любой вектор пространства.

Размерность — число векторов в базисе конечномерного пространства.

Для прямой — 1; для плоскости — 2; для обычного пространства — 3.



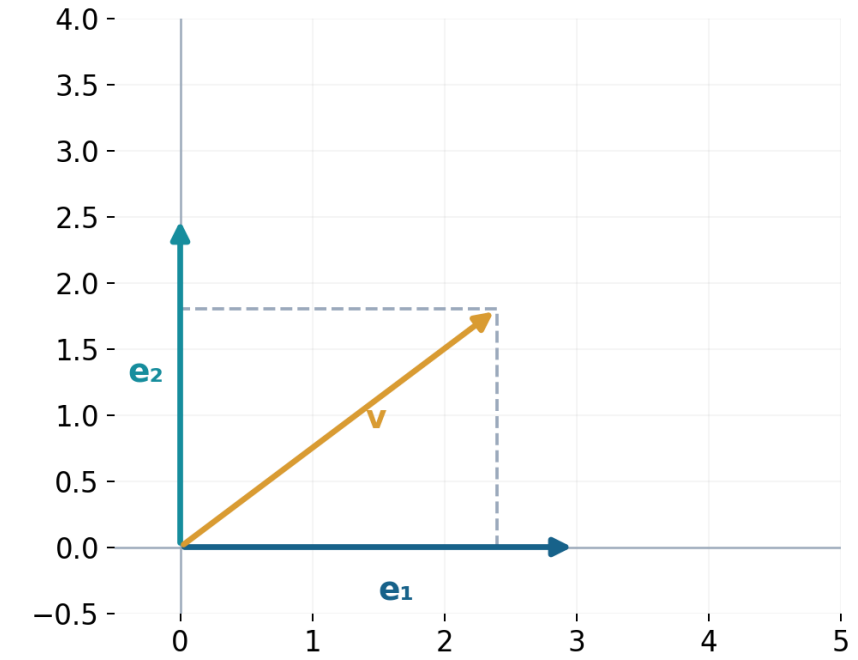
Разложение вектора по базису

Для базиса e_1, e_2 плоскости любой вектор имеет единственные координаты x и y.

Координаты показывают коэффициенты его линейной комбинации.

В пространстве координаты имеют вид (x, y, z).

$$a = x\,e_1 + y\,e_2$$



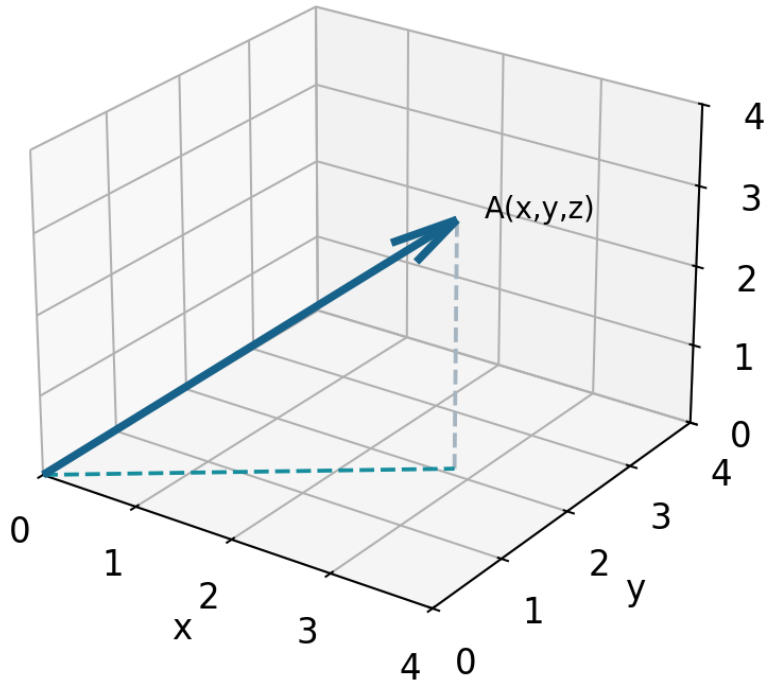
Прямоугольная система координат

В пространстве Oxyz используют три взаимно перпендикулярные оси Ox, Oy, Oz.

Единичные векторы вдоль осей образуют ортонормированный базис i, j, k.

Координаты вектора в этом базисе записываются в виде (x, y, z).

$$\mathbf{a} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$

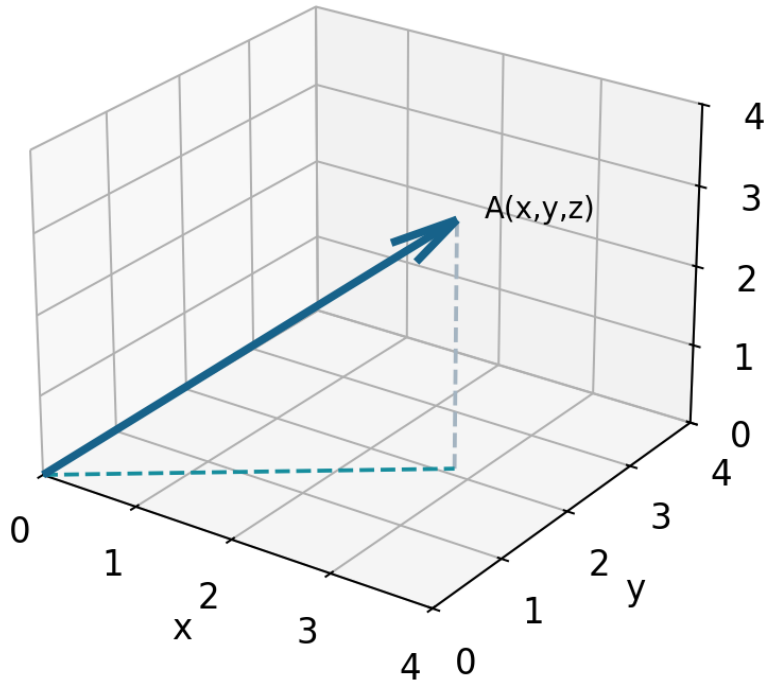


Радиус-вектор точки

Радиус-вектор точки A — вектор, направленный из начала координат O в точку A.

Если A имеет координаты (x, y, z), её радиус-вектор обладает теми же координатами.

$$\mathbf{OA} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$



Координаты вектора по двум точкам

Для двух точек $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ координаты вектора AB — разности соответствующих координат.

Пример: $A(1,1,1)$, $B(2,3,-1)$.

Получаем $AB = (1, 2, -2)$.

$$\mathbf{AB = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)}$$

Операции с координатами

Сумма векторов находится сложением соответствующих координат.

Умножение вектора на число означает умножение каждой координаты на это число.

Пример: a=(1,2,−1), b=(3,−1,4).

a+b=(4,1,3), 2a=(2,4,−2).

$$\mathbf{a + b = (a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)}$$

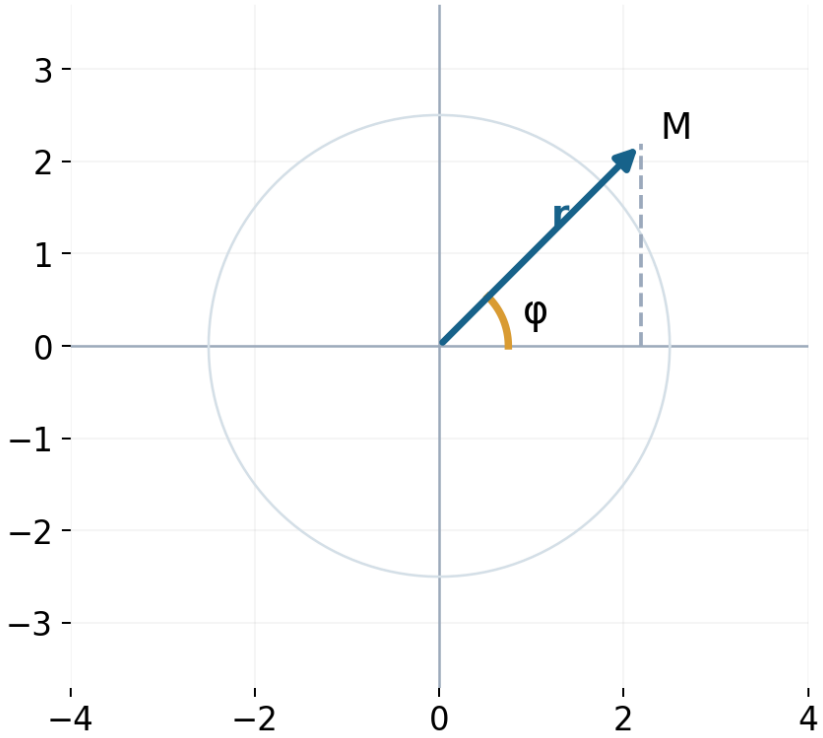
Полярная система координат

На плоскости задаются полюс O и полярная ось.

Положение точки M определяют полярным радиусом r и углом φ.

Декартовы и полярные координаты взаимосвязаны.

$$x = r\cos\varphi; \quad y = r\sin\varphi$$



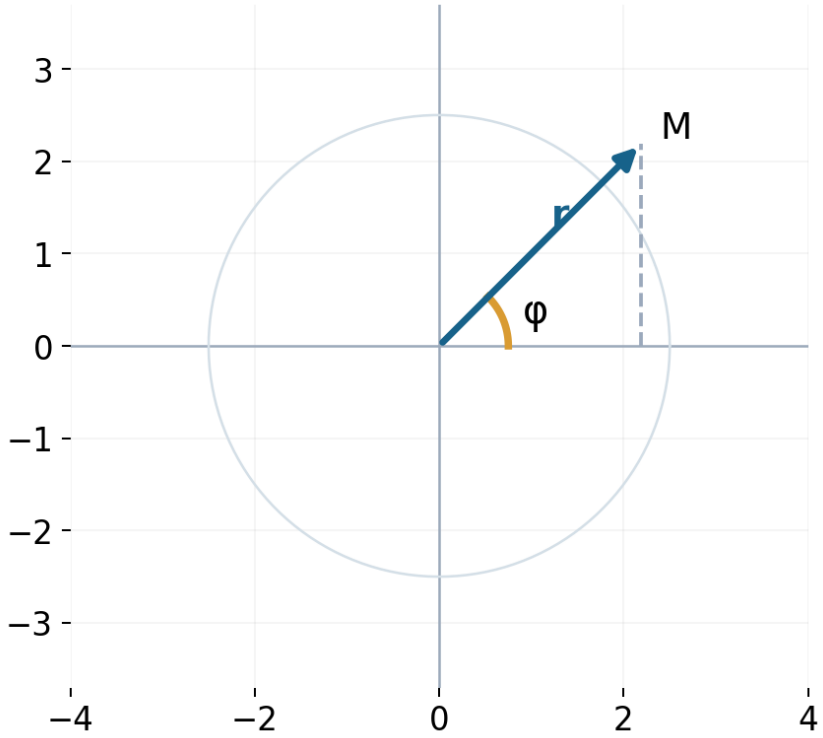
Пример перехода между координатами

Пусть r = 2, φ = π/3.

Тогда x = 2cos(π/3) = 1.

y = 2sin(π/3) = √3.

Ответ: M(1, √3).



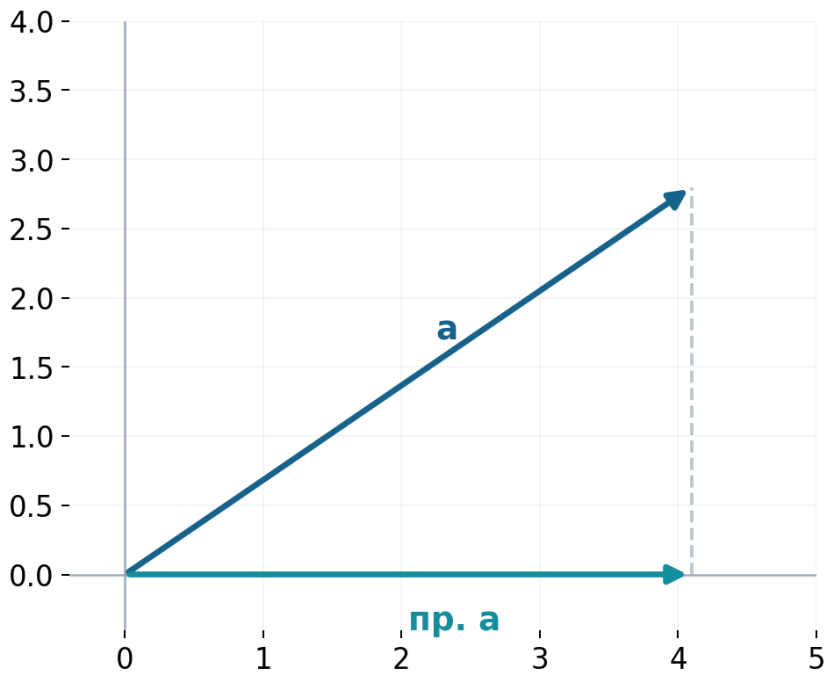
Проекция вектора на ось

Проекция вектора на ось — его алгебраическая составляющая вдоль заданного направления.

В прямоугольном базисе координаты вектора совпадают с проекциями на соответствующие оси.

Проекция может быть положительной, отрицательной или нулевой.

$$\text{пр}_x\, a = |a| \cos \alpha$$



Расстояние между точками

Расстояние между двумя точками равно модулю вектора, соединяющего их.

На плоскости применяют теорему Пифагора для двух координат, в пространстве — для трёх.

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Пример вычисления расстояния

Даны точки $A(1,1,1)$, $B(2,3,-1)$.

Разности координат: $\Delta x=1$, $\Delta y=2$, $\Delta z=-2$.

$AB = \sqrt{(1^2 + 2^2 + (-2)^2)} = \sqrt{9} = 3$.

Ответ: расстояние равно 3.

$$\mathbf{AB = 3}$$

Середина отрезка и деление в отношении

Координаты середины — полусуммы соответствующих координат концов.

Если M делит AB в отношении AM/MB = λ > 0, координаты находятся как взвешенное среднее.

$$x_m=(x_1+\lambda x_2)/(1+\lambda);\ \text{аналогично}\ y_m,\ z_m$$

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется вектором и когда два вектора равны?
2. Как складываются векторы и что такое линейная комбинация?
3. Как отличить линейную зависимость от независимости?
4. Что такое базис и размерность?
5. Как найти координаты, проекции и расстояние между точками?
6. Как связаны декартовы и полярные координаты?

Литература

Александров П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — Лань, 2009.

Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — ФМЛ, 2004.

Индивидуальные задания по высшей математике / под ред. А. П. Рябушко. — 2009.

Махмеджанов Н., Махмеджанова Р. Н. Сборник задач по высшей математике. — 2009.