Числовые множества и комплексные числа

Множества • Математическая логика • Координаты

Полярная система • Формы записи комплексных чисел

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

От числовых множеств к комплексной плоскости

Цель и результаты обучения

- Различать основные числовые множества и отношения между ними
- Использовать обозначения множеств и логические символы
- Работать с интервалами и координатными системами
- Переходить между декартовыми и полярными координатами
- Представлять комплексные числа в трёх формах

Что такое множество?

- Множество — совокупность объектов, называемых элементами
- Принадлежность: $a \in A$; непринадлежность: $a \notin A$
- Пустое множество обозначается символом $\varnothing$
- Подмножество: $A \subseteq B$; равенство: $A = B$

Пример: $A = \{1, 2, 3\}$, $2 \in A$, $5 \notin A$

Способы задания множеств

1. Перечисление элементов

$$A = \{2, 4, 6, 8\}$$

Указываем элементы явно

2. Через свойство

$$A = \{x \in \mathbb{N} : x < 10,\ x \text{ четное}\}$$

Описываем критерий принадлежности

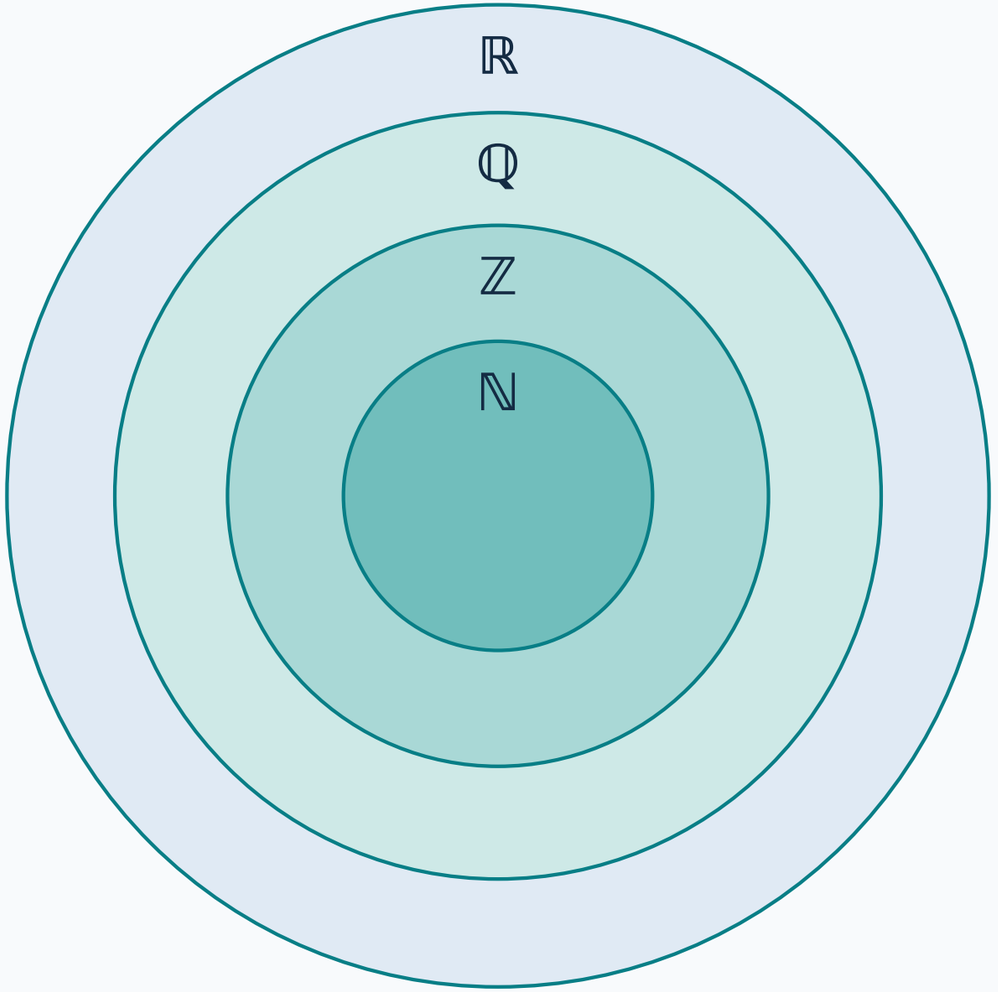
Равенство множеств: $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ и $B \subseteq A$

Основные числовые множества

$\mathbb{N}$	**Натуральные**	1, 2, 3, ...
$\mathbb{Z}$	**Целые**	..., −2, −1, 0, 1, 2, ...
$\mathbb{Q}$	**Рациональные**	$p/q,\ p \in \mathbb{Z},\ q \neq 0$
$\mathbb{R}$	**Вещественные**	Рациональные и иррациональные

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Включения числовых множеств



$\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$1/3 \in \mathbb{Q}$

$-5 \in \mathbb{Z}$

$7 \in \mathbb{N}$

Символы математической логики

$\forall$	для каждого
$\exists$	существует
$\Rightarrow$	следует
$\Leftrightarrow$	равносильно
$\wedge$	и
$\vee$	или
$\neg$	неверно, что

Пример: $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 0$

Интервалы и отрезки

[a, b]	$a \le x \le b$	Оба конца входят
(a, b)	$a < x < b$	Оба конца исключены
[a, b)	$a \le x < b$	Правый конец исключён
(a, b]	$a < x \le b$	Левый конец исключён

Для ограниченного промежутка длина равна $b - a$.

Числовая прямая и ε-окрестность

$$U_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon)$$



Окрестность содержит все числа на расстоянии < ε от x_0.

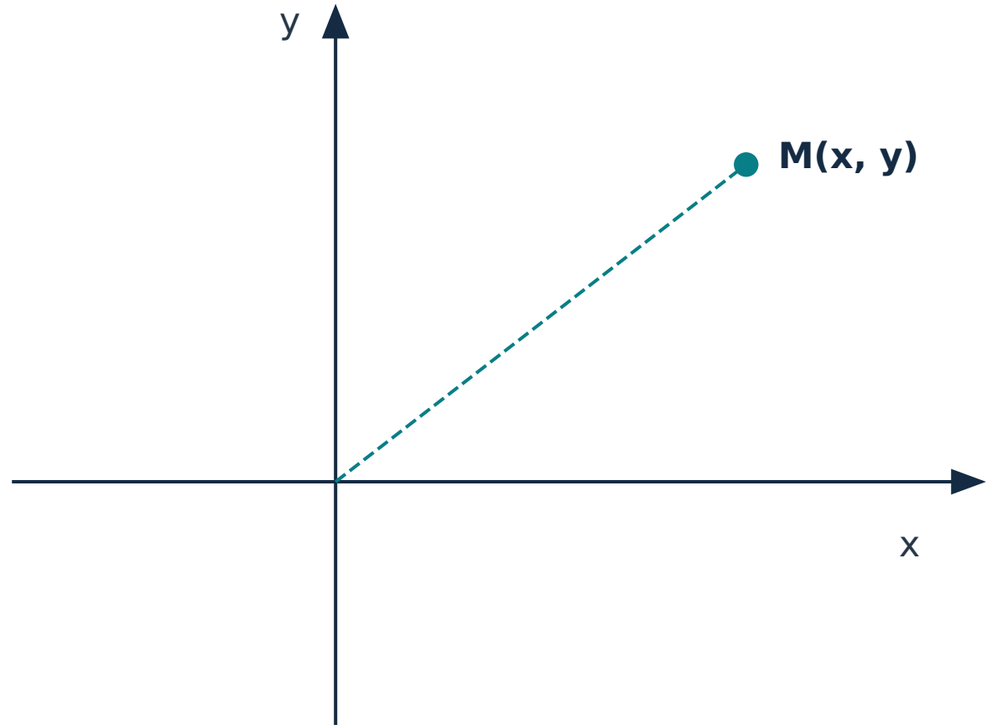
Ограниченные и неограниченные множества

- Ограничено сверху: $\exists M \in \mathbb{R},\ x \le M$ для всех $x \in X$
- Ограничено снизу: $\exists m \in \mathbb{R},\ x \ge m$ для всех $x \in X$
- Ограничено: существует $C > 0,\ |x| \le C$ для всех $x \in X$
- Пример: $[-2, 3]$ ограничено; $[0, +\infty)$ не ограничено сверху

Ограниченность относится ко всему множеству, а не к одной точке.

Декартова система координат

Плоскость Oxy



Пространство Oxyz

Три попарно перпендикулярные оси

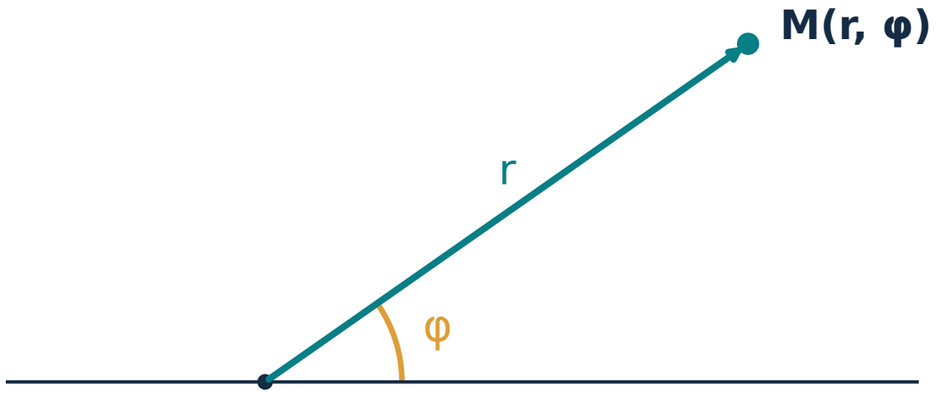
Точка: M(x, y, z)

Стандартный базис: i, j, k

Координаты задают положение точки в пространстве.

Полярные координаты

Полюс O, расстояние r, угол φ



Переход к декартовым координатам

$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Угол определяем с учётом четверти.

Пример: полярные → декартовы

- Дано: r = 4, φ = π/3
- Подставляем в формулы перехода
- Используем cos(π/3) = 1/2 и sin(π/3) = √3/2

$$x = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2, \qquad y = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

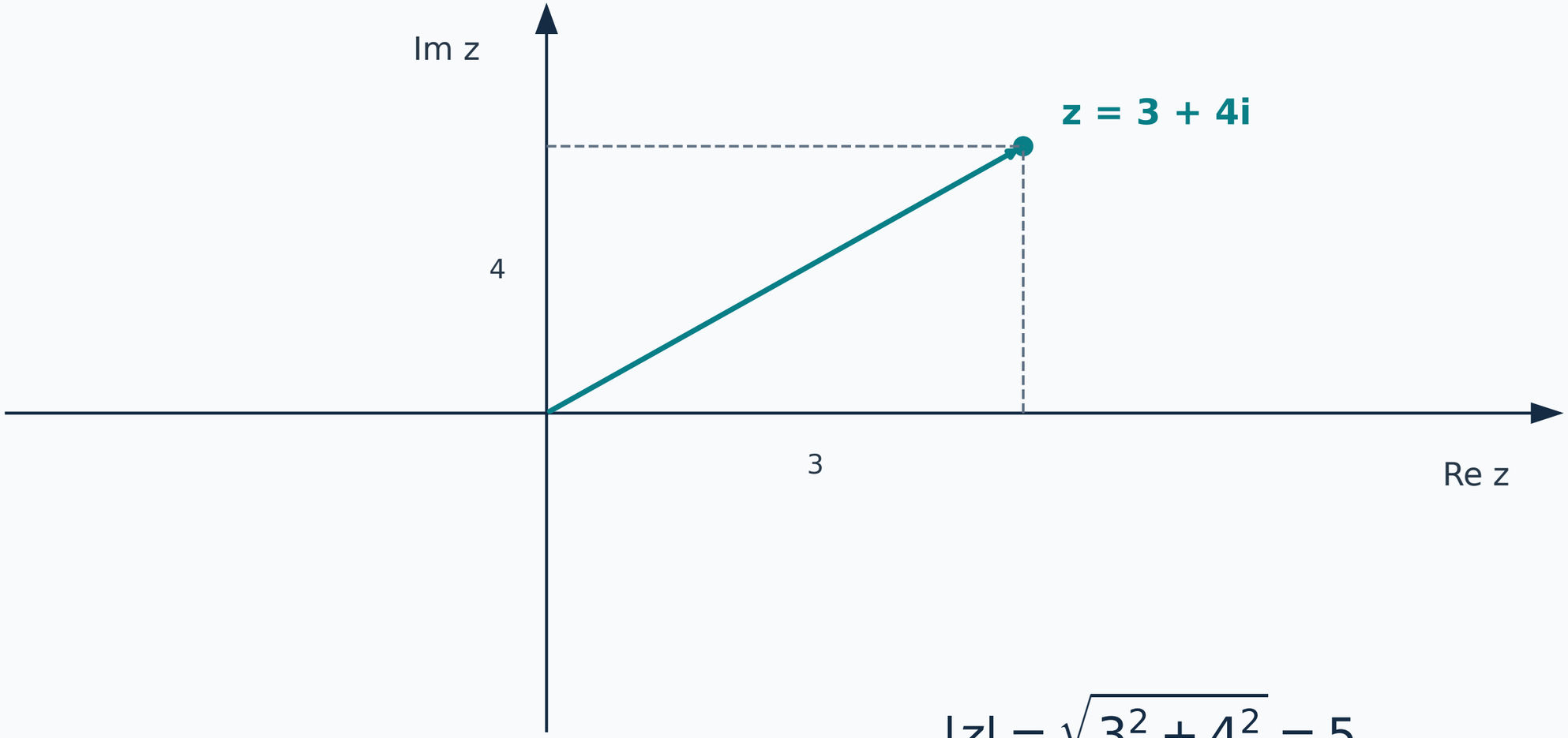
Комплексное число: определение

$$z = x + iy, \qquad i^2 = -1$$

- x = Re z — вещественная часть
- y = Im z — мнимая часть
- Комплексное число можно изобразить точкой (x, y)
- Множество комплексных чисел обозначают $\mathbb{C}$

Пример: z = 3 + 4i, Re z = 3, Im z = 4

Комплексная плоскость



$$|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

Алгебраическая форма комплексного числа

$$z = x + iy$$

- Удобна для сложения и вычитания
- Складываем отдельно вещественные и мнимые части
- При умножении используем равенство $i^2 = -1$

$(2 + 3i) + (4 - i) = 6 + 2i$

Модуль и аргумент комплексного числа

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{r}, \qquad \sin\varphi = \frac{y}{r}$$

- Модуль — расстояние от начала координат до точки z
- Аргумент φ — угол с положительной вещественной осью
- При выборе φ необходимо учитывать четверть плоскости

Тригонометрическая форма

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

- r = |z| ≥ 0 — модуль
- φ = arg z — аргумент (не единственный: φ + 2πk)
- Форма особенно полезна для умножения и возведения в степень

При z = 0 аргумент не определён.

Показательная форма. Формула Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$z = re^{i\varphi}$$

- Краткая запись тригонометрической формы
- Удобна для умножения, деления и возведения в степень
- Модуль умножается, а аргументы складываются

Пример: z = 3 + 4i в трёх формах

Шаг 1. Алгебраическая форма: $z = 3 + 4i$

Шаг 2. Модуль: $r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

Шаг 3. Аргумент: $\varphi = \arctan\frac{4}{3}$

Тригонометрическая форма: $z = 5(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Показательная форма: $z = 5e^{i\varphi}$

Сравнение трёх форм записи

Алгебраическая

$$z = x + iy$$

Сложение и вычитание

Тригонометрическая

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Геометрическая интерпретация

Показательная

$$z = re^{i\varphi}$$

Умножение, деление, степени

Проверьте себя

- Назовите основные числовые множества и их включения
- Как задают множество перечислением и через свойство?
- Чем различаются отрезок, интервал и полуинтервал?
- Запишите формулы перехода от полярных координат
- Что такое модуль и аргумент комплексного числа?
- Представьте число 1 + i в трёх формах

Задачи для самостоятельной работы

- 1. Определите принадлежность: $\sqrt{3}$, -7, $5/8$, 0
- 2. Запишите множество $\{x \in \mathbb{Z}: -2 \le x < 4\}$ перечислением
- 3. Переведите $(r, \varphi) = (6, \pi/6)$ в декартовы координаты
- 4. Найдите модуль и аргумент числа $-1 + i$
- 5. Запишите $2 - 2i$ в тригонометрической форме

Подсказка: учитывайте четверть при определении аргумента.

Основные выводы

- Математическая логика даёт компактный язык утверждений
- Числовые множества образуют систему вложений
- Декартовы и полярные координаты взаимосвязаны
- Комплексное число — точка или вектор на плоскости
- Три формы записи числа удобны для разных операций

Спасибо за внимание!