Лекция №10. Производные высших порядков

Производные и дифференциалы высших порядков

Классические теоремы дифференциального исчисления

Правило Лопиталя. Частные производные

Ключевые понятия • формулы • геометрический смысл • примеры

Цели и план занятия

- Научиться вычислять производные n-го порядка
- Применять формулу Лейбница к произведению
- Различать дифференциалы высших порядков
- Понимать теоремы Ферма, Ролля, Коши и Лагранжа
- Использовать правило Лопиталя для пределов

Производная n-го порядка

Производная следующего порядка получается дифференцированием предыдущей.

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$$

Нулевая производная: $f^{(0)}(x) = f(x)$.

Если существуют производные всех порядков, функция бесконечно дифференцируема.

Пример: показательная функция

Дана функция $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$.

При каждом дифференцировании появляется множитель $\ln a$.

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(a^x)'' = a^x (\ln a)^2$$

$$(a^x)^{(n)} = a^x (\ln a)^n$$

Линейность высших производных

$$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$$

$$(Cf)^{(n)} = Cf^{(n)}$$

$$(f+C)^{(n)} = f^{(n)}, \quad n \geq 1$$

Формула Лейбница

Производная порядка n от произведения двух функций:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Формула обобщает обычное правило производной произведения.

Пример применения формулы Лейбница

Найти вторую производную функции $y = x^2e^x$.

$$(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''$$

$$y'' = 2e^x + 4xe^x + x^2e^x$$

Ответ: $y'' = e^x(x^2 + 4x + 2)$.

Дифференциалы высших порядков

В лекции dx считается постоянным при повторном дифференцировании.

$$df = f'(x)\,dx$$

$$d^2f = f''(x)(dx)^2$$

$$d^nf = f^{(n)}(x)(dx)^n$$

Пример: $f(x)=x^3 \to d^2f = 6x(dx)^2$.

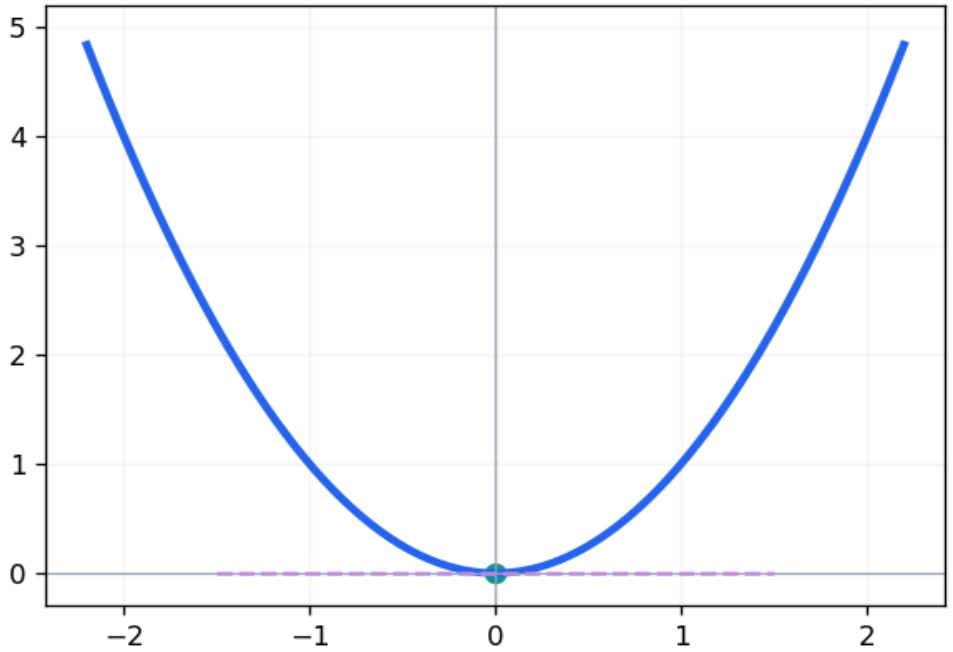
Экстремум функции

Локальный минимум: значения функции около x_0 не меньше $f(x_0)$.

Локальный максимум: значения около x_0 не больше f

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \text{(минимум)}$$

Экстремум — локальное понятие.



Теорема Ферма

Если функция дифференцируема в точке локального экстремума x_0, то производная в этой точке равна нулю.

$$f'(x_0) = 0$$

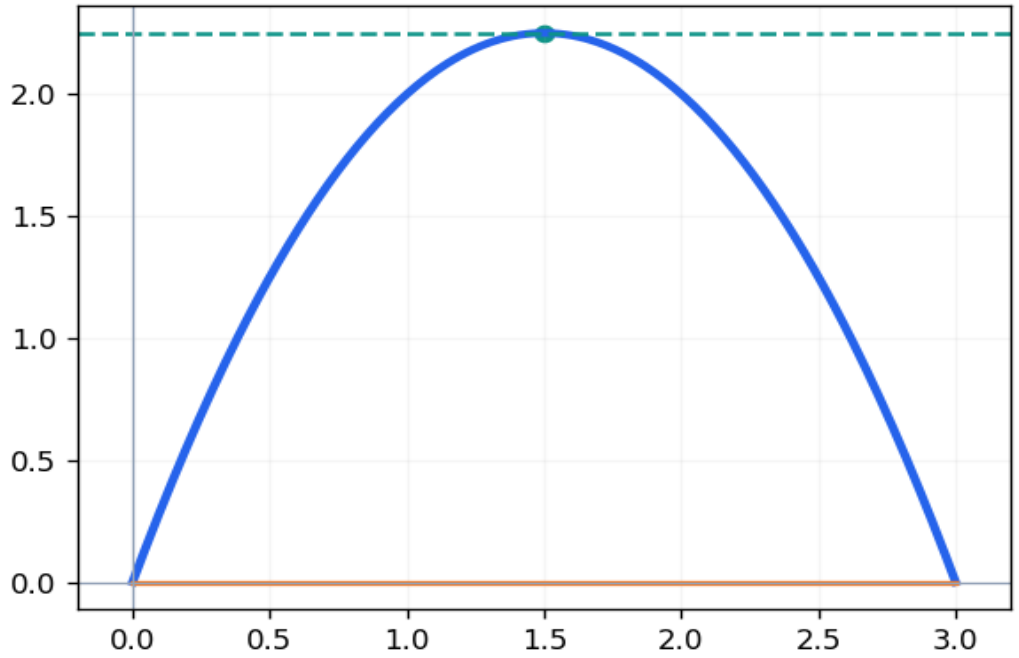
Условие необходимое, но недостаточное: например, $f(x)=x^3$ имеет $f'(0)=0$ без экстремума.

Теорема Ролля: условия и вывод

Функция непрерывна на [a,b], дифференцируема на (a,b)

и принимает равные значения на концах: f(a)=f(b).

$$\exists\, c \in (a,b): \quad f'(c) = 0$$



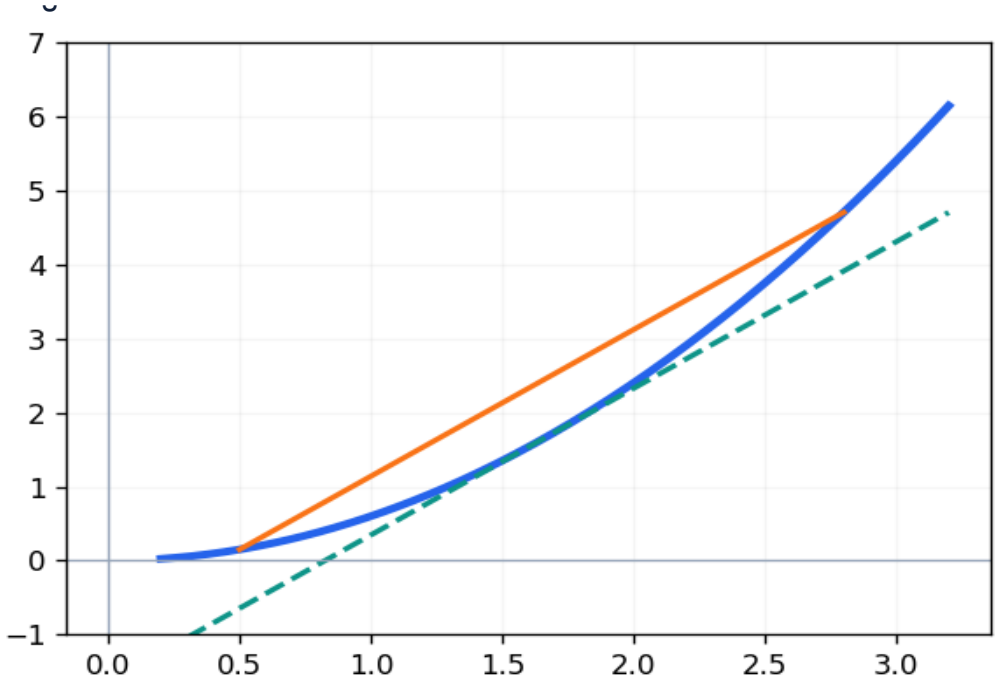
В некоторой точке касательная горизонтальна.

Теорема Лагранжа

Если f непрерывна на [a,b] и дифференцируема на (a,b),

то найдётся точка с внутри интервала, для кото

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f\prime(c)$$



Наклон касательной равен наклону секущей.

Пример теоремы Лагранжа

Для $f(x)=x^2$ на отрезке $[1,3]$ найдём точку c.

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{9-1}{2}=4$$

$$f'(c)=2c=4 \quad \Rightarrow \quad c=2$$

Точка $c = 2$ действительно находится внутри $(1,3)$.

Теорема Коши

Обобщение теоремы Лагранжа для двух функций f и g.

При стандартных условиях и $g'(x) \neq 0$ внутри интервала:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

При g(x)=x получаем теорему Лагранжа.

Правило Лопиталя

Помогает раскрывать неопределённости вида 0/0 и ∞/∞.

Проверяйте условия применимости прежде, чем дифференцировать.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f\prime(x)}{g\prime(x)}$$

Правую часть нужно вычислять как новый предел.

Правило не применяется напрямую к 0·∞ или ∞−∞.

Пример: предел x ln x

Найти предел при x → 0 справа.

Преобразуем неопределённость 0·(−∞) в отношение.

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$$

Ответ: 0.

Пример: котангенс и обратная величина

Вычислим предел при $x \to 0$:

$$\lim_{x \to 0} \left(\cot x - \frac{1}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-x \sin x}{\sin x + x \cos x} = 0$$

После объединения дробей применяем правило Лопиталя.

Степенные неопределённости

Для форм 1^∞ и 0^0 используем логарифмирование.

Пусть $y = f(x)^{g(x)}$, причём $f(x)>0$.

$$\ln y = g(x)\ln f(x)$$

$$\lim y = e^{A}, \quad A = \lim g(x)\ln f(x)$$

Затем исследуем предел произведения $g(x)\ln f(x)$.

Частные производные: основная идея

Для функции двух переменных z=f(x,y) частная производная

по x вычисляется при фиксированном y, и наоборот.

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Дополнительное пояснение к теме, упомянутой в заголовке лекции.

Пример: частные производные

Дана функция двух переменных:

$$f(x, y) = x^2y + 3xy^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 3y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 6xy$$

По другой переменной дифференцируем как по константе.

Самоконтроль и закрепление

- Дайте определение производной n-го порядка.
- Запишите формулу Лейбница.
- Сформулируйте теоремы Ферма, Ролля и Лагранжа.
- Какие неопределённости раскрывает правило Лопиталя?
- Чем отличается ∂f/∂x от ∂f/∂y?

Литература

1. Н. Махмеджанов. Сборник заданий по высшей математике.

2. Л. Д. Кудрявцев. Краткий курс математического анализа.

3. Б. П. Демидович. Сборник задач по анализу.

4. Н. Махмеджанов, Р. Н. Махмеджанова. Сборник задач.

Материал составлен по лекции №10, с дополнительными учебными примерами.