Несобственные интегралы

Бесконечные пределы интегрирования и неограниченные функции

Определения • сходимость • вычисление • признаки сравнения

Цель и план лекции

- Различать несобственные интегралы I и II рода
- Записывать интеграл как предел определённых интегралов
- Исследовать сходимость и расходимость
- Применять признаки сравнения и решать примеры

Почему интеграл называется несобственным?

I род

Промежуток интегрирования неограничен: верхний или нижний предел бесконечен.

II род

Подынтегральная функция неограниченна возле особой точки.

Оба случая определяются через пределы обычных определённых интегралов.

I род: интеграл до +∞

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

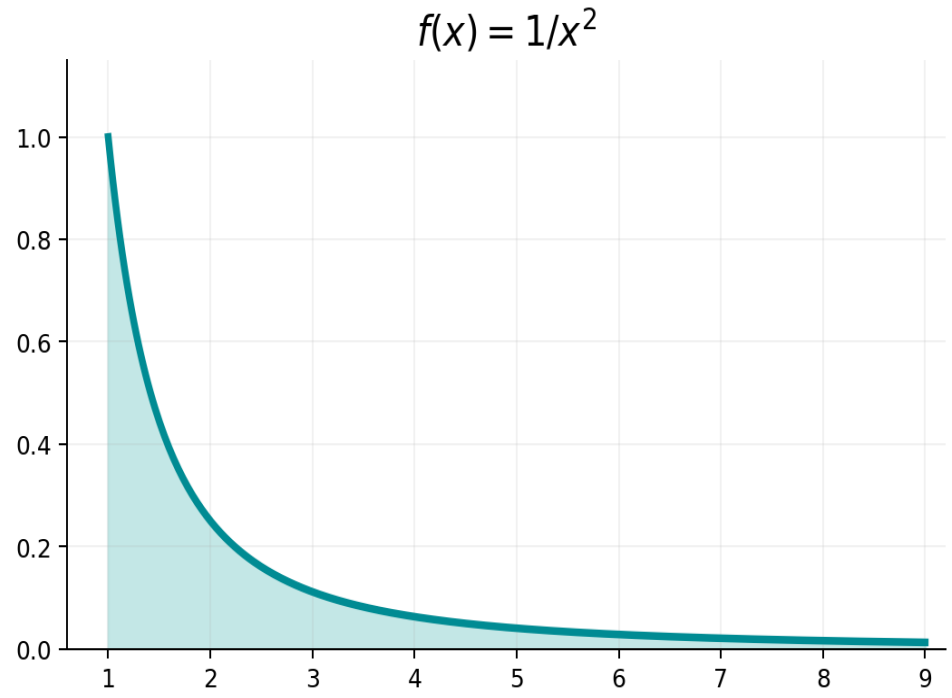
- Предел конечен → интеграл сходится.
- Предел не существует или бесконечен → расходится.

При f(x) ≥ 0 значение сходящегося интеграла равно конечной площади под графиком.

Геометрический смысл: бесконечная область

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \to \infty} \left(1 - \frac{1}{b}\right) = 1$$

Фигура простирается бесконечно вправо, но её площадь конечна.



Вычисление по первообразной

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} [F(b) - F(a)]$$

Алгоритм: найти первообразную → подставить конечную границу → вычислить предел.

Важно: формула применима при непрерывности функции на каждом конечном отрезке [a, b].

Пример 1. Расходящийся интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{dx}{x}$$

$$= \lim_{b \to \infty} (\ln b - \ln 1) = +\infty$$

Вывод: интеграл расходится.

Нижний предел −∞ и вся числовая ось

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$$

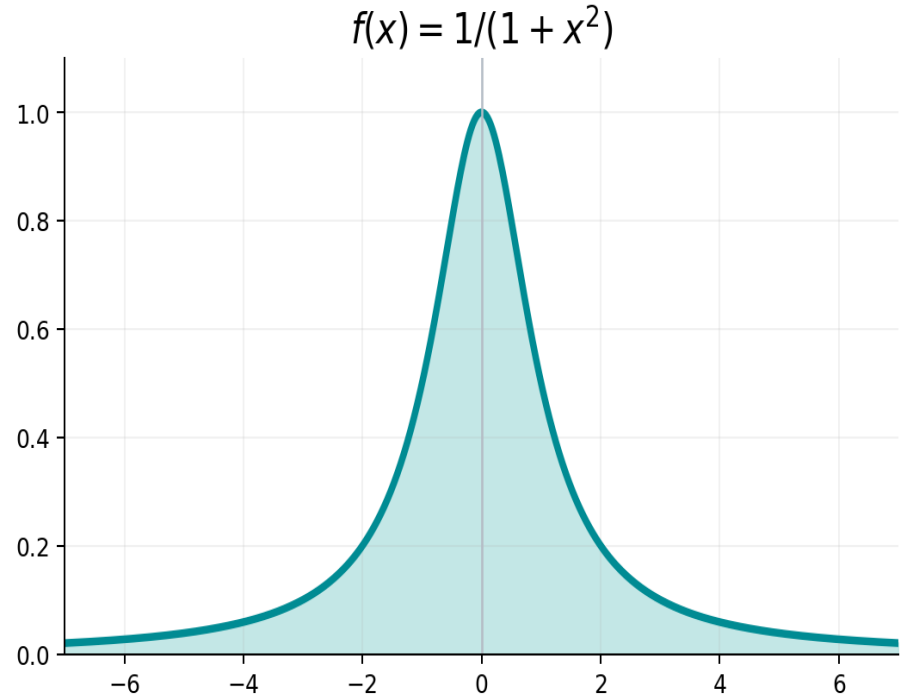
Сходимость на всей оси ⇔ обе части сходятся по отдельности.

Пример 2. Интеграл на всей оси

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= [\arctan x]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$



Интеграл сходится.

II род: особенность на границе

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to b-} \int_a^c f(x)\,dx$$

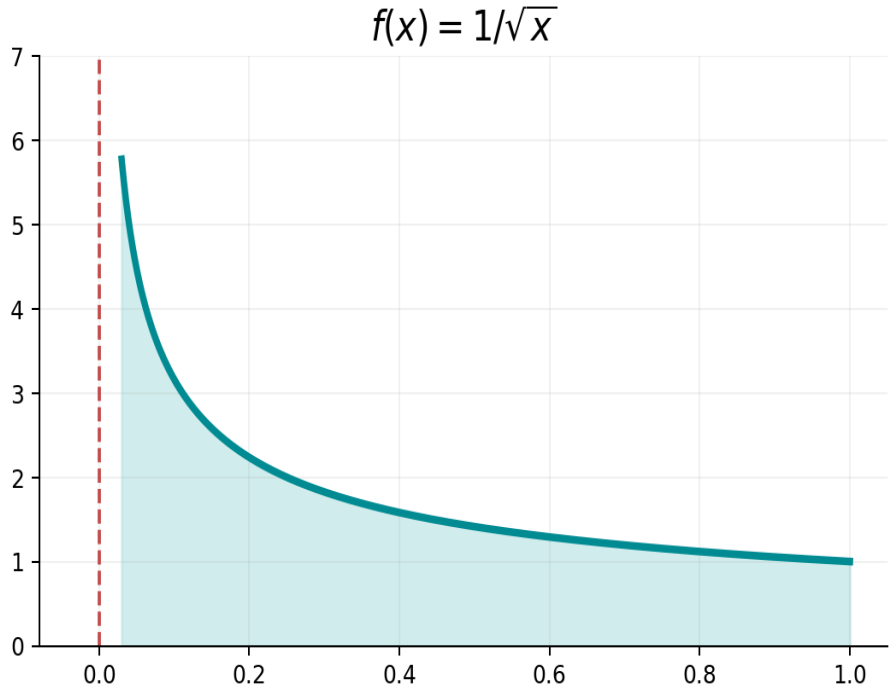
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to a+} \int_c^b f(x)\,dx$$

Подход к особой точке осуществляется только с допустимой стороны.

Пример: особенность в точке 0

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_\varepsilon^1 x^{-1/2}\, dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0+} (2 - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2$$



Особенность не всегда означает расходимость.

Особая точка внутри промежутка

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

- Каждый интеграл задаётся собственным односторонним пределом.
- Если хотя бы одна часть расходится, исходный интеграл расходится.
- Нельзя «сокращать» бесконечности с разных сторон.

Пример 4. Типичная ошибка

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{x}$$

Левая часть → −∞, правая → +∞. Оба несобственных интеграла расходятся; исходный интеграл не существует.

Главное значение по Коши равно 0, но это НЕ значение несобственного интеграла.

Первый признак сравнения

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad (x \geq a)$$

Если ∫ g(x) dx сходится, то ∫ f(x) dx также сходится.

Если ∫ f(x) dx расходится, то ∫ g(x) dx тоже расходится.

Условия: неотрицательность и сравнение на бесконечном промежутке.

Пример 5. Сравнение с эталоном

$$0 < \frac{1}{x^5+1} \leq \frac{1}{x^5}, \qquad x \geq 1$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^5} = \left[-\frac{1}{4x^4}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{4}$$

Следовательно, исходный интеграл сходится.

Предельный признак сравнения

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A, \qquad 0 < A < +\infty$$

Тогда ∫ f(x) dx и ∫ g(x) dx сходятся или расходятся одновременно.

Полезно выбирать g(x) по старшим степеням числителя и знаменателя.

Пример 6. Эквивалентность на бесконечности

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{x^2+x+1} \sim \frac{1}{x^{3/2}}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^{-3/2}} = 1$$

$$\int_1^{+\infty} x^{-3/2}\,dx = 2$$

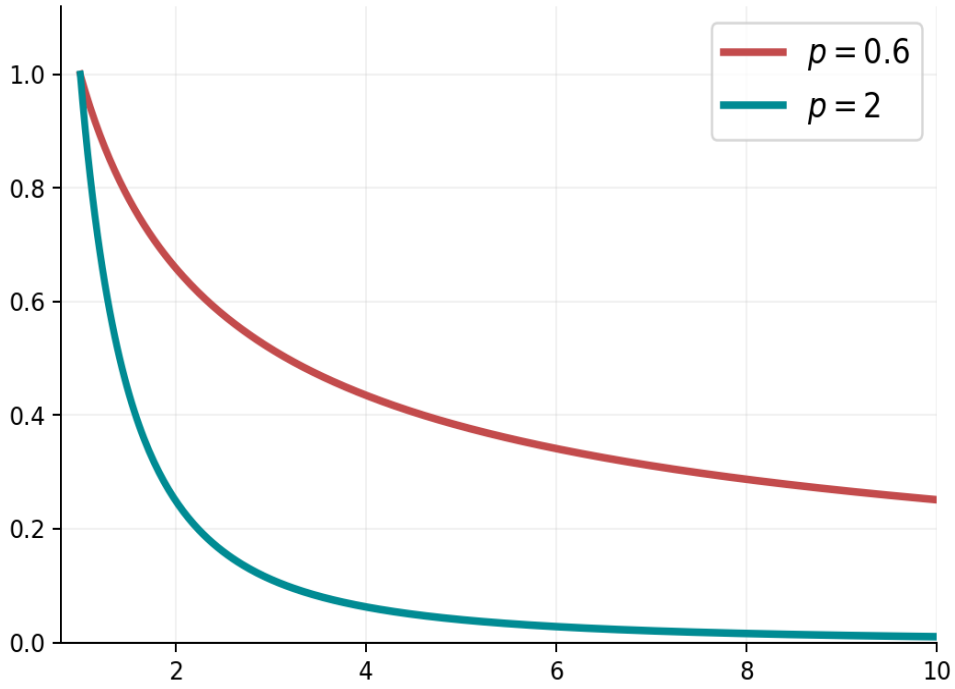
По предельному признаку исходный интеграл сходится.

Полезный эталон: p-интегралы

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$$

Сходится при p > 1.

Расходится при p ≤ 1.



Для особенности в точке 0: $\int_0^1 x^{-p}\,dx$ сходится при $p < 1$.

Алгоритм исследования сходимости

- Найдите бесконечный предел или особую точку.
- Разделите интеграл при внутренних разрывах.
- Попробуйте вычислить предел по первообразной.
- Если вычисление сложно — примените сравнение.
- Сформулируйте вывод о сходимости каждой части.

Вопросы для самоконтроля

- Что называют несобственным интегралом I и II рода?
- Чем отличаются сходимость и расходимость?
- Как разделить интеграл при внутренней особенности?
- Почему нельзя напрямую применить Ньютона–Лейбница к $1/x$ на $[-1;1]$?
- Сформулируйте два признака сравнения.

Литература и итоги

- Махмеджанов Н., Махмеджанова Р. Н. Сборник задач по высшей математике (2009).
- Махмеджанов Н. М. Сборник заданий по высшей математике (2021).
- Кудрявцев Л. Д. Краткий курс математического анализа, т. 1–2 (2005).
- Демидович Б. П. Сборник задач по математическому анализу.

Итог: несобственный интеграл — предел, а сходимость требует проверки всех особых участков.