ЛЕКЦИЯ №2

Определители, матрицы, обратная матрица и ранг

От вычисления определителя к исследованию структуры матрицы

Презентация подготовлена по материалам лекции №2

Цели и план занятия

- Понятие матрицы и её размерности
- Определители 1-го, 2-го и 3-го порядков
- Свойства определителей и разложение по строке
- Операции над матрицами и обратная матрица
- Ранг матрицы: миноры и метод Гаусса

Матрица: определение и обозначения

Определение

Матрица размера m × n — прямоугольная таблица чисел из m строк и n столбцов.

Элемент a_{ij}

Первый индекс i — номер строки; второй j — номер столбца.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad (2 \times 3)$$

Виды матриц

Квадратная

Число строк равно числу столбцов: $n \times n$. Порядок матрицы равен n.

Диагональная

Все элементы вне главной диагонали равны нулю.

Треугольная

У верхней треугольной матрицы ниже диагонали стоят нули; у нижней — выше.

Единичная I

Диагональная матрица с единицами на главной диагонали.

Определитель: число, связанное с квадратной матрицей

- Определитель существует только для квадратной матрицы.
- Обозначения: $\det(A)$, $|A|$.
- Для матрицы первого порядка $A = [a]$ имеем $\det(A) = a$.
- Если $\det(A) = 0$, матрица вырождена.

Определитель второго порядка

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Пример

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

Определитель третьего порядка: правило Саррюса

Для матрицы $A = (a_{ij})$, $i,j = 1,2,3$:

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Правило Саррюса применяют только к определителям третьего порядка.

Пример: вычисление определителя 3 × 3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Вычисление

$45 + 84 + 96 - 105 - 72 - 48 = 0$

$\det(A) = 0 \;\rightarrow\;$ матрица вырожденная

Семь важных свойств определителя

- $\det(A^T) = \det(A)$.
- Перестановка двух строк меняет знак определителя.
- Одинаковые строки или нулевая строка $\Rightarrow \det(A) = 0$.
- Умножение строки на k умножает определитель на k.
- Прибавление к строке другой строки $\times k$ не меняет $\det(A)$.

Минор и алгебраическое дополнение

Минор M_{ij}

Определитель, оставшийся после удаления i-й строки и j-го столбца.

Алгебраическое дополнение

$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

Знаки дополнений: $+ \; - \; + \; / \; - \; + \; - \; / \; + \; - \; +$

Миноры и дополнения нужны при разложении определителя и поиске A^{-1}.

Разложение определителя по строке

Разложим по первой строке:

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

Пример: A = [1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]

$\det(A) = 1(45 - 48) - 2(36 - 42) + 3(32 - 35)$

$= -3 + 12 - 9 = 0$

Треугольные и диагональные матрицы

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

Пример

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 2 \cdot (-1) \cdot 5 = -10$$

Действия над матрицами

Сложение

A + B определено, если у матриц одинаковые размеры. Складываем соответствующие элементы.

Умножение на число

λA: каждый элемент матрицы умножается на λ.

Транспонирование

В A^T строки исходной матрицы становятся столбцами.

Умножение матриц: согласование размеров

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times k} = C_{m \times k}$$

Правило вычисления элемента

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$$

Внутренние размеры должны совпадать: число столбцов A = числу строк B.

Пример: AB и BA различаются

A = [1 2; 3 4] **B = [0 1; 2 3]**

Произведение AB

AB = [4 7; 8 15]

Произведение BA

BA = [3 4; 11 16]

AB ≠ BA: умножение матриц некоммутативно

Обратная матрица

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Критерий существования

Обратная матрица существует тогда и только тогда, когда $\det(A) \neq 0$.

Если $\det(A) = 0$, матрица называется вырожденной и обратной не имеет.

Формула обратной матрицы

$$A^{-1} = (1 / \det(A)) \cdot \operatorname{adj}(A)$$

Как построить adj(A)

1. Найти det(A).
2. Вычислить алгебраические дополнения C_{ij}.
3. Транспонировать матрицу дополнений.
4. Разделить на det(A).

Пример: обратная матрица 2 × 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Определитель

$\det(A) = -2$

$$A^{-1} = (-1/2)\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

Проверка: $A \cdot A^{-1} = I$.

Ранг матрицы

Определение

Ранг A — наибольший порядок её ненулевого минора.

Ограничение

$0 \le \operatorname{rank}(A) \le \min(m, n)$.

Для нулевой матрицы $\operatorname{rank}(A) = 0$.

rank(A) = число линейно независимых строк (или столбцов)

Определение ранга методом миноров

Матрица:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Решение

Есть ненулевой минор второго порядка.

Определитель третьего порядка равен нулю.

Следовательно, rank(A) = 2.

Метод Гаусса и ранг

- Переставляем строки; умножаем строку на ненулевое число.
- Прибавляем к строке другую строку с коэффициентом.
- Приводим матрицу к ступенчатому виду.
- Ранг равен числу ненулевых строк ступенчатой матрицы.

Элементарные преобразования строк сохраняют ранг.

Пример метода Гаусса

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Шаги

$R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$

Получаем строки:

[1 2 3], [0 0 0], [0 1 1]

Две ненулевые строки ⇒ rank(A) = 2.

Алгоритм выбора метода

Найти определитель

2×2: формула $ad - bc$.

3×3: Саррюс или разложение.

Большие размеры: преобразования и разложение.

Найти обратную матрицу

Проверить $\det(A) \neq 0$, затем дополнения и транспонирование.

Найти ранг

Миноры или ступенчатая форма методом Гаусса.

Самостоятельная работа

- Найдите det([2 1; 5 3]).
- Вычислите определитель [1 0 2; 2 1 3; 0 1 1].
- Найдите AB для A = [1 2; 0 1], B = [2 0; 3 4].
- Найдите обратную к матрице [2 1; 1 1].
- Определите ранг [1 2 3; 2 4 6; 1 1 1].

Вопросы для самоконтроля

- Что называют минором и алгебраическим дополнением?
- Какие свойства определителя полезны для вычислений?
- При каких размерах возможно произведение двух матриц?
- Когда существует обратная матрица?
- Почему метод Гаусса позволяет находить ранг?

Итоги лекции

Определитель

Характеризует квадратную матрицу и помогает проверить её обратимость.

Операции

Матрицы складываются, транспонируются и перемножаются по определённым правилам.

Обратная матрица

Существует при ненулевом определителе.

Ранг

Показывает число линейно независимых строк или столбцов.

Литература: Александров; Беклемишев; Рябушко; Махмеджанов и Махмеджанова.