Уравнения прямых и плоскостей

Лекция №5 • Общее понятие об уравнениях и геометрических объектах

Алгебраические линии и поверхности

Прямые на плоскости и в пространстве

Параллельность, перпендикулярность, углы и расстояния

Цели и план лекции

Научиться переводить геометрические условия в уравнения.

Различать способы задания прямых и плоскостей.

Использовать нормальные и направляющие векторы.

Вычислять углы и расстояния.

Уравнение как геометрическое условие

На плоскости

$F(x, y) = 0$

Описывает множество точек (x, y).

В пространстве

$F(x, y, z) = 0$

Описывает множество точек (x, y, z).

Примеры: $x^2 + y^2 = R^2$ — окружность; $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ — сфера.

Алгебраические линии и поверхности

Алгебраическая линия: $F(x,y)=0$, где F — многочлен.

Алгебраическая поверхность: $F(x,y,z)=0$, где F — многочлен.

Порядок определяется степенью многочлена в общем случае.

Примеры

1-й порядок: прямая, плоскость.

2-й порядок: окружность, эллипс, парабола, сфера, эллипсоид.

Основные формы уравнения прямой

С угловым коэффициентом: $y = kx + b$

Через точку: $y - y_0 = k(x - x_0)$

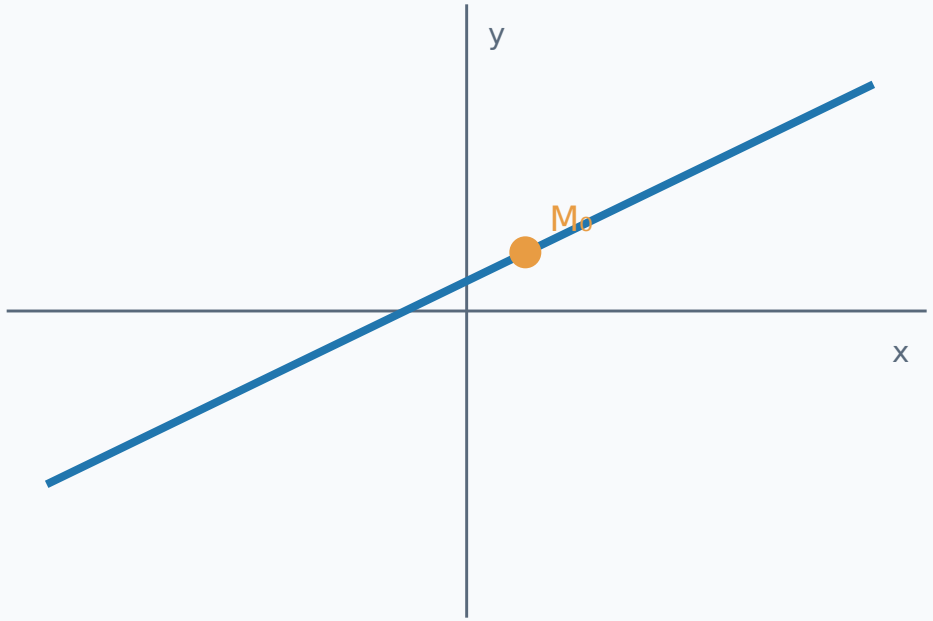
Общее уравнение: $Ax + By + C = 0$

В отрезках: $x/a + y/b = 1$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$)

Угловой коэффициент прямой

$k = \operatorname{tg}\alpha$ — тангенс угла наклона к положительному направлению Ox.

Точка пересечения с осью Oy имеет координаты (0, b).



$$y = kx + b$$

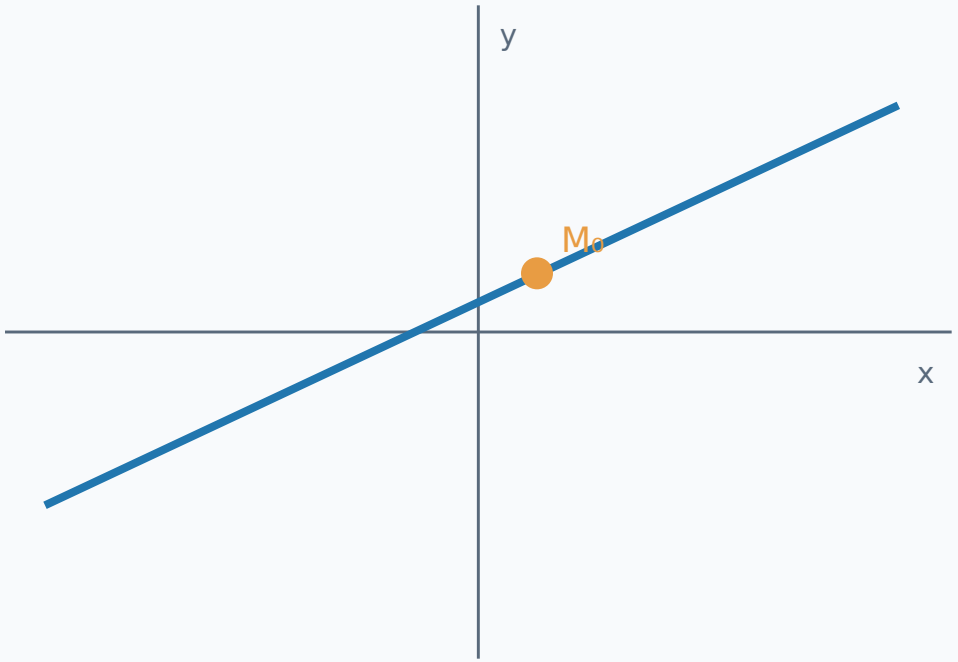
Прямая через заданную точку

При заданных $M_0(x_0,y_0)$ и k:

Точка M принадлежит прямой, если

приращения пропорциональны.

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$



Уравнение прямой через две точки

Даны $M_0(x_0,y_0)$, $M_1(x_1,y_1)$.

Направляющий вектор: $s = (x_1 - x_0,\ y_1 - y_0)$.

$$\mathbf{(x - x_0)/(x_1 - x_0) = (y - y_0)/(y_1 - y_0)}$$

Если знаменатель равен нулю, соответствующая координата постоянна.

Пример: (1,2) и (3,6) ⇒ $y - 2 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x$.

Параметрическое задание прямой

Пусть $M_0(x_0, y_0)$, направляющий вектор $s=(l,m)$.

Положение точки: $r = r_0 + ts$, $t \in \mathbb{R}$.

$$x = x_0 + lt$$

$$y = y_0 + mt$$

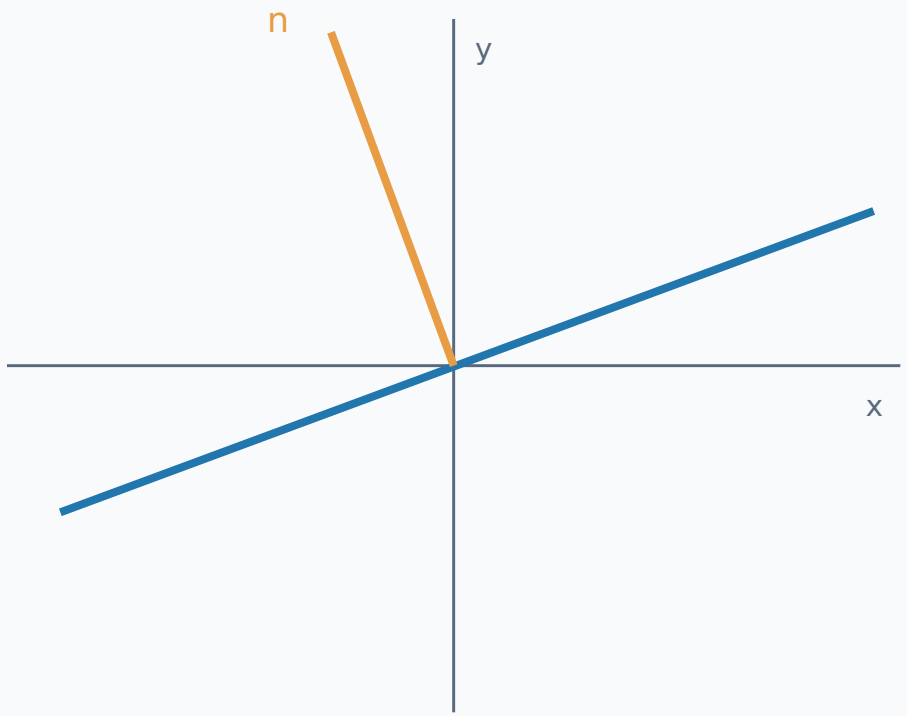
В пространстве дополнительно: $z = z_0 + nt$.

Нормальный вектор и общее уравнение

Для $Ax + By + C = 0$ нормаль $n = (A, B)$.

Вектор n перпендикулярен каждому направлению прямой.

$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$



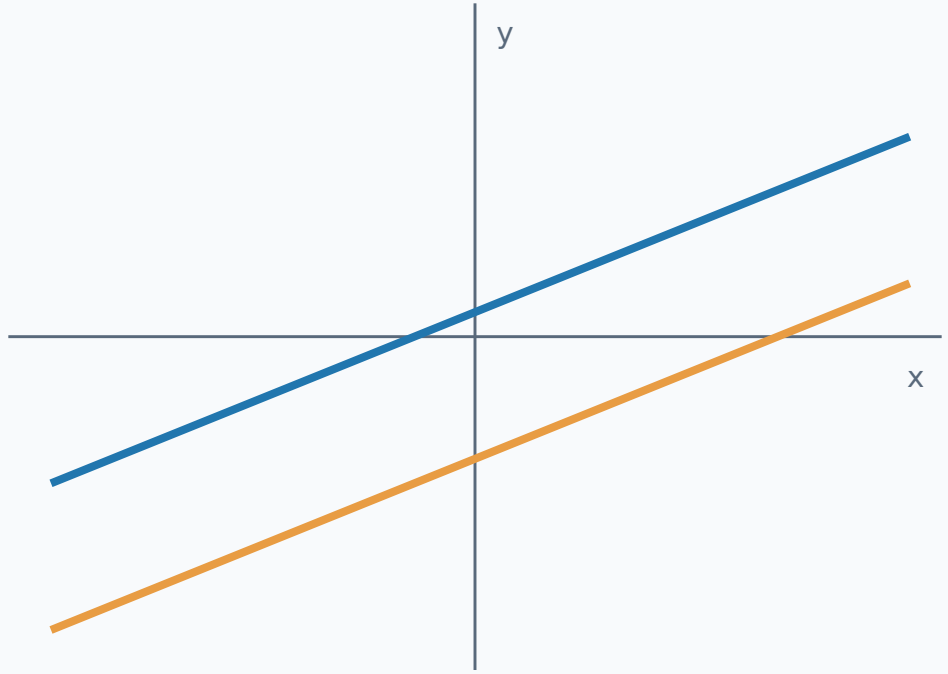
Параллельность прямых

Для $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$:

Прямые параллельны, если $k_1 = k_2$.

В общем виде нормали пропорциональны.

$$A_1B_2 - A_2B_1 = 0$$

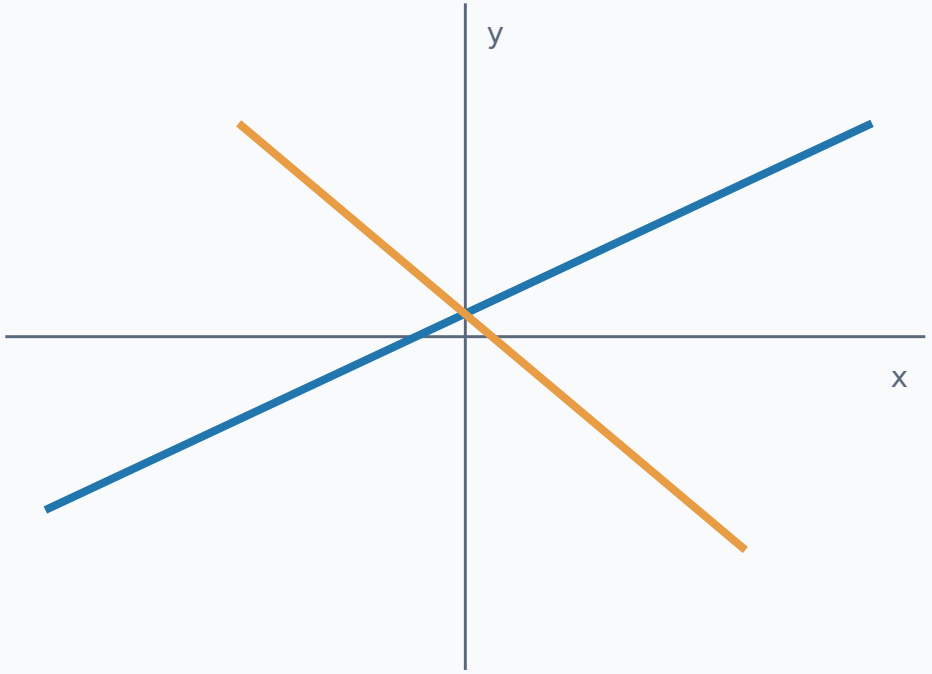


Перпендикулярность прямых

Для конечных угловых коэффициентов: $k_1k_2 = -1$.

В общем виде нормали ортогональны.

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$



Угол между двумя прямыми

Используют скалярное произведение нормальных векторов.

Для острого угла берут модуль числителя.

$$\cos \varphi = |A_1A_2 + B_1B_2| / (|n_1| \cdot |n_2|)$$

$$|n_i| = \sqrt{(A_i^2 + B_i^2)}$$

Расстояние от точки до прямой

Точка $M_0(x_0,y_0)$, прямая $Ax + By + C = 0$.

$$\mathbf{d = |Ax_0 + By_0 + C| / \sqrt{(A^2 + B^2)}}$$

Пример

$M_0(1,3)$, $3x + 4y + 10 = 0$

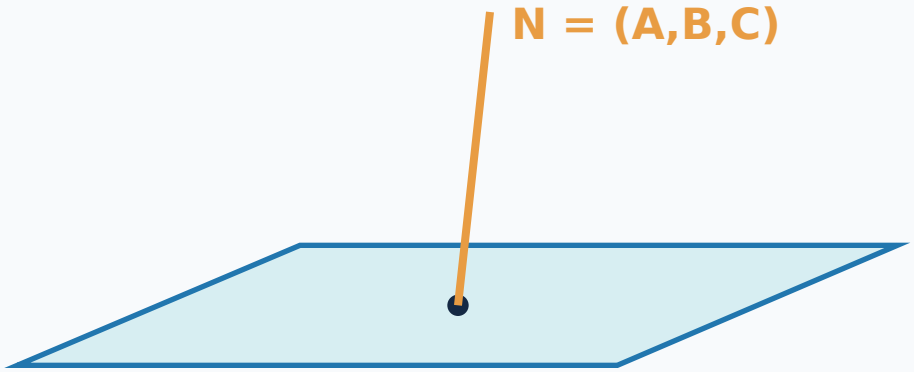
$d = |3\cdot 1 + 4\cdot 3 + 10|/5 = 25/5 = 5$

Уравнение плоскости через точку и нормаль

Точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$; $N = (A,B,C)$ — нормальный вектор.

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

$N \cdot (r - r_0) = 0$



Общее уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$

N = (A,B,C) — нормаль плоскости.

D = 0: плоскость проходит через начало координат.

В отрезках: $x/a + y/b + z/c = 1$ (ненулевые a,b,c).

Плоскость через три точки

M_1, M_2, M_3 не лежат на одной прямой.

Векторы M_1M_2 и M_1M_3 задают направления в плоскости.

$$\det [\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1] = 0$$

Определитель равен нулю тогда и только тогда,

когда указанные три вектора компланарны.

Угол между плоскостями

Плоскости заданы нормалями $N_1=(A_1,B_1,C_1)$, $N_2=(A_2,B_2,C_2)$.

Угол между плоскостями равен острому углу между нормалями.

$$\cos\varphi = |A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2| / (|N_1|\cdot|N_2|)$$

Параллельность: N_1 и N_2 пропорциональны.

Перпендикулярность: $N_1 \cdot N_2 = 0$.

Расстояние от точки до плоскости

Плоскость: $Ax + By + Cz + D = 0$.

Точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

$$\mathbf{d = |Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D| \,/\, \sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}$$

Пример

$M_0(1,2,3)$, $2x - y + 2z - 3 = 0$

$d = |2 - 2 + 6 - 3|/3 = 1$

Прямая в пространстве

Прямая задаётся точкой $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и направлением $s=(l,m,n)$.

Её можно представить как пересечение двух непараллельных плоскостей.

$$\mathbf{(x - x_0)/l = (y - y_0)/m = (z - z_0)/n}$$

Параметрически: $x=x_0+lt$, $y=y_0+mt$, $z=z_0+nt$.

При нулевой компоненте направления соответствующая координата постоянна.

Прямая и плоскость: взаимное положение

Направляющий вектор прямой s=(l,m,n).

Нормаль плоскости N=(A,B,C).

$N \cdot s = Al + Bm + Cn$

Прямая параллельна плоскости: $N \cdot s = 0$.

Прямая перпендикулярна плоскости: $s \parallel N$.

$\sin \varphi = |N \cdot s|/(|N|\cdot|s|)$ — острый угол между ними.

Алгоритм решения геометрической задачи

1. Выберите тип уравнения по заданным данным.

2. Найдите нормальный или направляющий вектор.

3. Подставьте координаты известной точки.

4. Проверьте условия параллельности/перпендикулярности.

5. При необходимости вычислите расстояние или угол.

Самопроверка

1. Запишите три способа задания прямой на плоскости.

2. Как найти нормаль к $Ax + By + C = 0$?

3. Когда прямые параллельны и перпендикулярны?

4. Как задать плоскость через точку и нормаль?

5. Как вычислить расстояние от точки до плоскости?

6. Как задать пространственную прямую параметрически?

Литература и итоги

Александров П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.

Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.

Индивидуальные задания по высшей математике / ред. А. П. Рябушко.

Махмеджанов Н., Махмеджанова Р. Н. Сборник задач по высшей математике.

Главная идея

Геометрическое положение объекта кодируется уравнением и векторами.