Определённый интеграл

Интегральные суммы • Формула Ньютона–Лейбница

Замена переменной • Интегрирование по частям

От геометрической площади к точному вычислению

Презентация по материалам лекции №13

Цели и план занятия

После занятия студент сможет:

- объяснить интеграл как предел интегральных сумм;
- применять свойства и формулу Ньютона–Лейбница;
- вычислять интегралы заменой и по частям.

Геометрическая мотивация

Для неотрицательной функции интеграл равен площади



Криволинейная трапеция

Ограничена x = a, x = b, осью Ox и y = f(x).

Разбиение отрезка

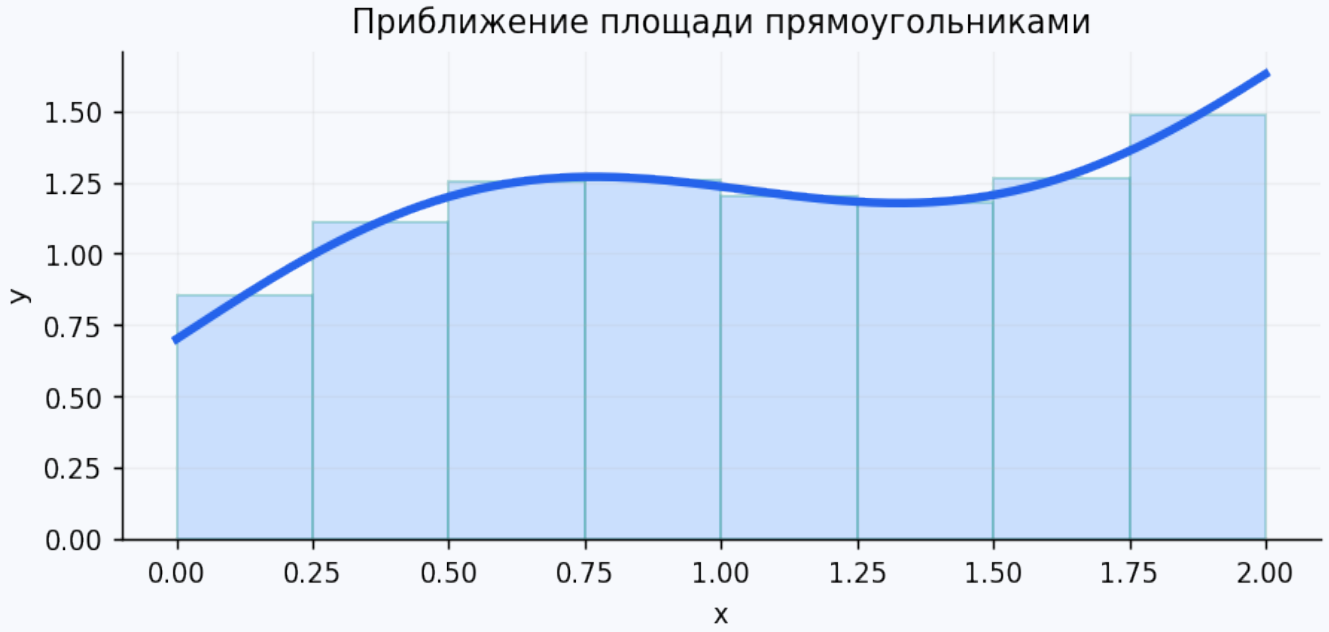
Выберем точки $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

Длина каждого участка: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

На каждом участке выберем $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Мелкое разбиение даёт более точное приближение площади.

Интегральная сумма



Сумма Римана

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Сумма площадей узких прямоугольников

Определение определённого интеграла

При максимальной длине участка, стремящейся к нулю:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Если предел существует и не зависит от выбора разбиений и точек.

Условия интегрируемости

Достаточные условия:

- f непрерывна на [a, b];
- либо f имеет конечное число разрывов первого рода.

При этих условиях определённый интеграл существует.

Свойства: линейность и монотонность

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)\,dx = \alpha \int_a^b f\,dx + \beta \int_a^b g\,dx$$

$$f(x) \le g(x) \;\Rightarrow\; \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

В частности, интеграл константы равен C(b − a).

Оценка интеграла

Если $m \le f(x) \le M$ на $[a, b]$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

Пример: $4 \le 5 + \sin(x^2) \le 6$ на $[0, 10]$

Следовательно, $40 \le \int_0^{10} (5 + \sin(x^2))\,dx \le 60$.

Теорема о среднем значении

Если f непрерывна на [a, b], существует c ∈ [a, b]:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

Среднее значение функции: f(c) = (1/(b − a)) ∫ₐᵇ f(x) dx.

Аддитивность и ориентация пределов

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Также $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

Интеграл с переменным верхним пределом

Накопление величины от a до x:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Если f непрерывна, то Φ′(x) = f(x).

Формула Ньютона–Лейбница

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Здесь F′(x) = f(x) на [a, b].

Пример: $\int_0^2 x^2\,dx = [x^3/3]_0^2 = 8/3$.

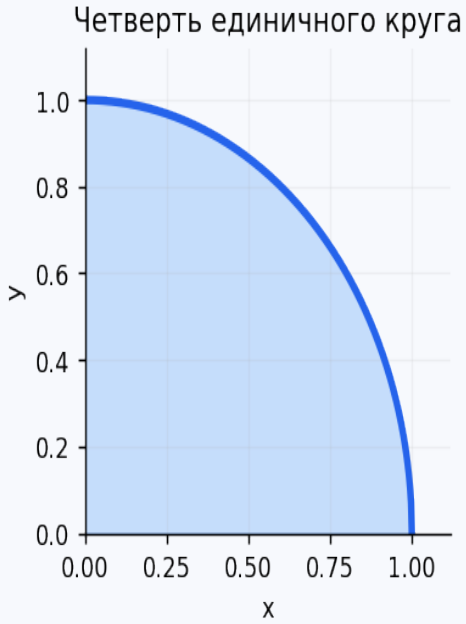
Замена переменной

При x = φ(t), a = φ(α), b = φ(β):

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

Важно: вместе с переменной изменяются и пределы интегрирования.

Пример замены: четверть круга



$x = \sin t,\ \ dx = \cos t\, dt$

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = \frac{\pi}{4}$$

Результат — площадь ¼ единичного круга.

Интегрирование по частям

Пусть u и v непрерывно дифференцируемы:

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

Алгоритм: выбрать u и dv → найти du и v → подставить.

Пример интегрирования по частям

Вычислить $\int_1^e x \ln(x)\, dx$.

Выбираем: $u = \ln x$, $dv = x\, dx$.

Тогда: $du = dx/x$, $v = x^2/2$.

$$\int_1^e x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x \, dx$$

Ответ: $(e^2 + 1)/4$.

Частые ошибки

Проверьте себя:

- Пределы при замене переменной изменены правильно?
- Учтены обе границы в формуле Ньютона–Лейбница?
- При интегрировании по частям не потерян знак «−»?
- Первообразная действительно имеет производную f(x)?

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое интегральная сумма?

2. Как определяют определённый интеграл?

3. Сформулируйте формулу Ньютона–Лейбница.

4. Как действует замена переменной?

5. Запишите формулу интегрирования по частям.

6. Чем отличается интеграл с переменным верхним пределом?

Литература и итоги

Махмеджанов Н., Махмеджанова Р. Н. Сборник задач (2009).

Н. М. Махмеджанов. Сборник заданий (2021).

Кудрявцев Л. Д. Краткий курс математического анализа.

Демидович Б. П. Сборник задач по математическому анализу.

Ключевая идея: интеграл — предел сумм и инструмент вычисления.