Скалярное, векторное и смешанное произведения

Угол между векторами · Перпендикулярность · Коллинеарность

Площади параллелограмма и треугольника

Объёмы параллелепипеда и тетраэдра

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \qquad \vec{a} \times \vec{b} \qquad (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Цели и план занятия

Научиться вычислять произведения векторов по координатам.

Находить угол и проверять перпендикулярность.

Использовать векторное произведение для площадей.

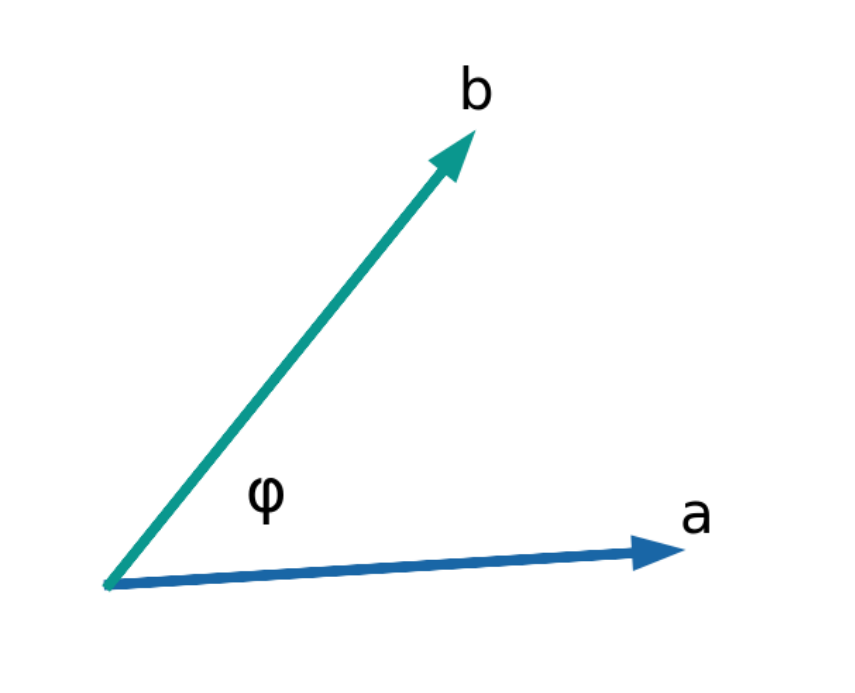
Использовать смешанное произведение для объёмов.

Скалярное произведение

Результат — число.

φ — угол между ненулевыми векторами.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi$$



Скалярное произведение в координатах

Пусть $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$.

Сложите произведения соответствующих координат.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Пример: скалярное произведение

Дано: a = (1, 2, 3), b = (4, 5, 6).

Перемножаем одноимённые координаты и складываем.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 32$$

Угол между векторами

Для ненулевых векторов используем скалярное произведение.

Косинус угла равен отношению произведения к длинам.

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}\right)$$

Перпендикулярность и направляющие косинусы

Два ненулевых вектора перпендикулярны, если их скалярное произведение равно нулю.

Направляющие косинусы задают ориентацию вектора.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|\vec{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_2}{|\vec{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_3}{|\vec{a}|}$$

Пример: проверка перпендикулярности

$a = (2, -1, 3)$, $b = (1, 5, 1)$.

Вычислим скалярное произведение.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 5 + 3 \cdot 1 = 0$$

$$\vec{a} \perp \vec{b}$$

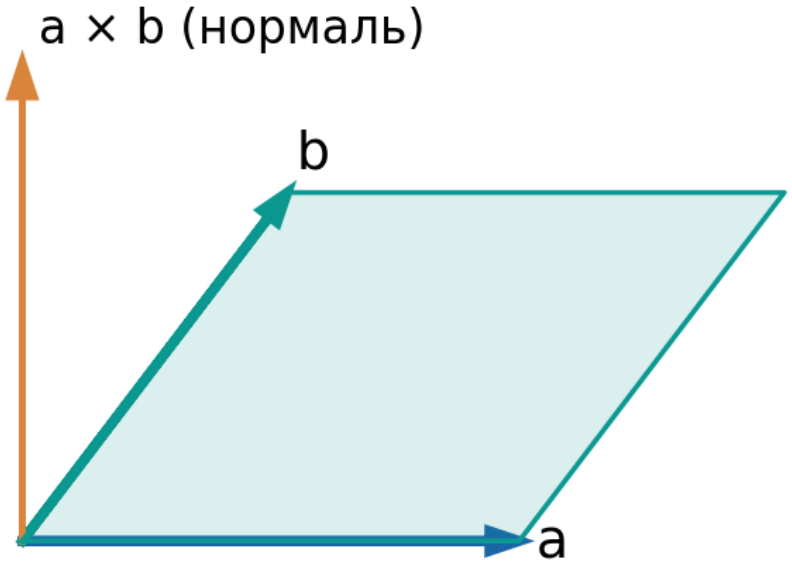
Векторное произведение

Результат — вектор.

Он перпендикулярен обоим исходным вектора

Направление — по правилу правой руки.

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\varphi$$



Векторное произведение: свойства

Порядок сомножителей важен (антикоммутативность).

Умножение на число и распределительный закон.

$$\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b})$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$$

Координатная формула

Вычисление удобно записать как определитель.

Вторая компонента имеет знак «минус» при разложении.

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2,\ a_3 b_1 - a_1 b_3,\ a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2,\ a_3 b_1 - a_1 b_3,\ a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Пример: векторное произведение

Дано: a = (1, 2, 3), b = (4, 5, 6).

Вычисляем каждую координату результата.

$$\vec{a} \times \vec{b} = (12 - 15,\ 12 - 6,\ 5 - 8)$$

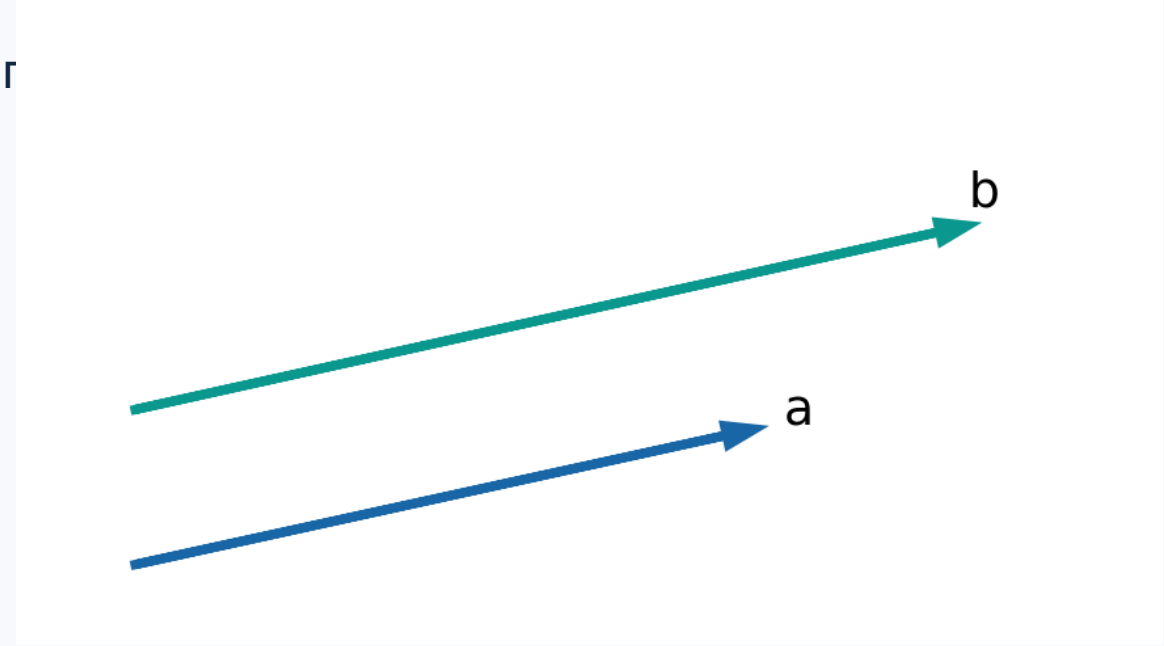
$$\vec{a} \times \vec{b} = (-3,\ 6,\ -3)$$

Коллинеарные векторы

Два ненулевых вектора коллинеарны,

если один является числовым кратным друг

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$$



Геометрический смысл: площадь

Модуль векторного произведения равен площади параллелограмма на исходных векторах.

Площадь треугольника вдвое меньше.

$$S_{\text{пар}} = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$S_{\text{тр}} = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$$

Пример: площадь треугольника

Векторы: a = (2, 0, 0), b = (0, 3, 0).

Их векторное произведение равно (0, 0, 6).

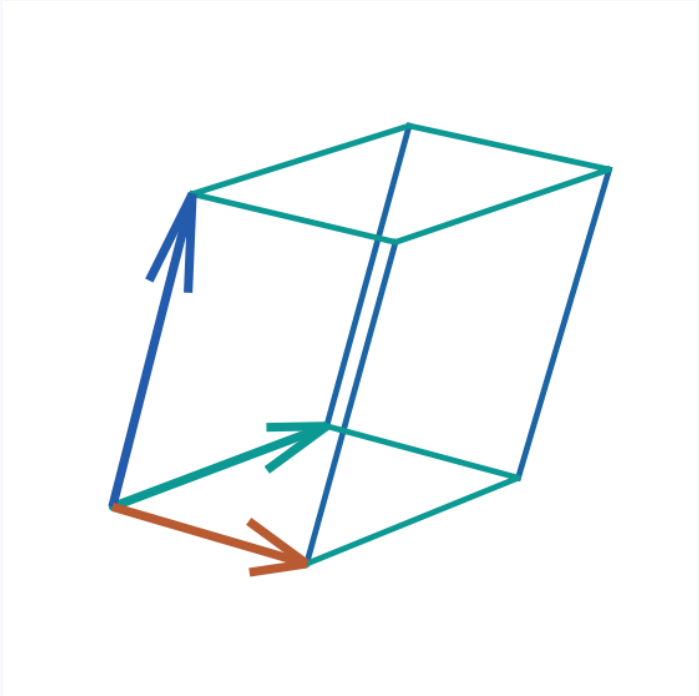
$$S_{\text{пар}} = 6, \qquad S_{\text{тр}} = 3$$

Смешанное произведение

Берём векторное произведение первых двух и скалярно умножаем на третий.

Результат — число со знаком.

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$



Смешанное произведение: определитель

Для трёх векторов в пространстве

смешанное произведение равно определителю 3×3.

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

Объёмы через смешанное произведение

Абсолютное значение равно объёму параллелепипеда.

Объём тетраэдра составляет одну шестую.

Без модуля знак отражает ориентацию тройки.

$$V_{\text{пар}} = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

$$V_{\text{тетр}} = \frac{1}{6}|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

Компланарность трёх векторов

Три вектора лежат в одной плоскости

(или параллельны некоторой одной плоскости),

если их смешанное произведение равно нулю.

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$$

Пример: смешанное произведение

a = (1, 0, 0), b = (0, 2, 0), c = (0, 0, 3).

Определитель диагональной матрицы = 1·2·3 = 6.

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 6$$

$$V_{\text{пар}} = 6, \qquad V_{\text{тетр}} = 1$$

Сводная таблица: что вычисляем?

Скалярное: число → угол, перпендикулярность.

Векторное: вектор → нормаль, площадь, коллинеарность.

Смешанное: число → объём, компланарность.

Вопросы для самоконтроля

Как найти угол между двумя векторами?

Когда векторы перпендикулярны или коллинеарны?

Как определяется векторное произведение?

Как вычисляются площадь параллелограмма и треугольника?

Когда три вектора компланарны?

Литература

П. С. Александров — Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

Д. В. Беклемишев — Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

А. П. Рябушко (ред.) — Индивидуальные задания по математике.

Н. Махмеджанов, Р. Н. Махмеджанова — Сборник задач.