Интегрирование функций различных классов

Тригонометрические • рациональные • иррациональные

Основные методы, подстановки и разобранные примеры

Тригонометрические

Рациональные

Иррациональные

Цель и план лекции

Научиться выбирать эффективную технику интегрирования по виду подынтегральной функции.

01 Тригонометрия

Универсальная подстановка; чётность; формулы произведения.

02 Рациональные дроби

Правильные и неправильные дроби; разложение на простейшие.

03 Квадратный трёхчлен

Выделение полного квадрата; табличные интегралы.

04 Иррациональности

Подстановки, устраняющие дробные степени.

Универсальная тригонометрическая подстановка

Любую рациональную функцию от sin x и cos x можно преобразовать в рациональную функцию новой переменной.

$$t = \tan\frac{x}{2}$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

Когда применять

Если другие замены не дают удобного результата; метод универсален, но иногда громоздок.

Пример: универсальная подстановка

$$I = \int \frac{dx}{1 + \cos x}$$

Подставим t = tan(x/2) и преобразуем знаменатель:

$$1 + \cos x = \frac{2}{1 + t^2}$$

$$I = \int \frac{2\,dt/(1 + t^2)}{2/(1 + t^2)} = \int dt$$

$$I = \tan\frac{x}{2} + C$$

Если выражение нечётно по косинусу

Выделяем множитель cos x, остальные степени cos x выражаем через sin x.

$$t = \sin x, \qquad dt = \cos x\, dx$$

Пример:

$$\int \sin^3 x \cos x\, dx = \int t^3\, dt$$

$$\frac{\sin^4 x}{4} + C$$

Если выражение нечётно по синусу

Выделяем множитель sin x и используем подстановку cos x = t.

$$t = \cos x, \qquad dt = -\sin x\, dx$$

Пример:

$$\int \sin x \cos^2 x\, dx = -\int t^2\, dt$$

$$-\frac{\cos^3 x}{3} + C$$

Когда удобна подстановка t = tan x

Если R(−sin x, −cos x) = R(sin x, cos x), выражение можно свести к рациональной функции от tan x.

$$t = \tan x, \qquad dx = \frac{dt}{1 + t^2}$$

Пример:

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + \tan^2 x)\, dx$$

$$= \int dt = t + C = \tan x + C$$

Произведение тригонометрических функций

Преобразуем произведение в сумму с помощью тождеств:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$$

Пример: интеграл от sin²x cos²x

$$I = \int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$$

$$\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4} \sin^2 2x$$

$$= \frac{1}{8}(1 - \cos 4x)$$

$$I = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + C$$

Рациональная функция и правильная дробь

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \qquad Q(x) \neq 0$$

Правильная дробь

Степень числителя меньше степени знаменателя.

Неправильная дробь

Степень числителя не меньше степени знаменателя.

Алгоритм: сначала выделить целую часть (если нужно), затем разложить правильную дробь на простейш

Четыре типа простейших дробей

I. $\dfrac{A}{x-a}$

II. $\dfrac{A}{(x-a)^k}, \quad k \geq 2$

III. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$

IV. $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$

Для квадратичных множителей без действительных корней: $p^2 - 4q < 0$.

Интегрирование простейших дробей

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a| + C$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = \frac{A(x-a)^{1-k}}{1-k} + C$$

$$\int \frac{dt}{t^2+m^2} = \frac{1}{m}\arctan\frac{t}{m} + C$$

Подсказка

Квадратичные знаменатели часто требуют выделения полного квадрата.

Выделение полного квадрата

Первый шаг при работе с квадратным трёхчленом $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Пример:

$$x^2 + 4x + 7 = (x + 2)^2 + 3$$

После замены $t = x + 2$ знаменатель станет $t^2 + 3$.

Пример: интеграл с квадратным трёхчленом

$$I = \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 7}$$

$$= \int \frac{dx}{(x+2)^2 + 3}$$

$$t = x + 2, \quad m = \sqrt{3}$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x+2}{\sqrt{3}} + C$$

Рекуррентный подход для степеней квадратичного знаменателя

$$I_k = \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^k}, \qquad k \geq 2$$

Интегрирование по частям приводит к интегралу с меньшим показателем k.

$$I_k = \frac{t}{2m^2(k-1)(t^2+m^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2m^2(k-1)} I_{k-1}$$

$$I_1 = \frac{1}{m} \arctan \frac{t}{m} + C$$

Разложение неправильной рациональной дроби

Делением многочленов выделяем целую часть и правильную дробь.

$$\frac{x^2+3x+5}{x+1} = x + 2 + \frac{3}{x+1}$$

$$\int \frac{x^2+3x+5}{x+1}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + 2x + 3\ln|x+1| + C$$

Метод неопределённых коэффициентов

Для разных линейных множителей вводим неизвестные коэффициенты и сравниваем коэффициенты мно

$$\frac{5x+1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

$$5x+1 = A(x+2) + B(x-1)$$

$$A = 2, \qquad B = 3$$

$$I = 2\ln|x-1| + 3\ln|x+2| + C$$

Как раскладывать знаменатель на множители

Правило: каждый линейный или неразложимый квадратичный множитель даёт свою группу простейших

$$\frac{P(x)}{(x-a)^2(x^2+px+q)}$$

$$= \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+px+q}$$

Важно

Разложение выполняется после сокращений и проверки правильности дроби.

Иррациональные функции: замена x = t^k

Если подынтегральная функция содержит дробные степени x, выбираем k — НОК знаменателей показате

$$x = t^k, \qquad dx = kt^{k-1}\,dt$$

Пример с квадратным корнем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+1}, \qquad x = t^2$$

$$= \int \frac{2t}{t+1}\,dt = 2t - 2\ln|t+1| + C$$

$$= 2\sqrt{x} - 2\ln(\sqrt{x}+1) + C$$

Дробно-линейное выражение под корнем

Для степеней дробно-линейного выражения подходящая замена также превращает интеграл в рациональ

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_i/q_i}$$

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$$

Здесь k — наименьшее общее кратное знаменателей q_i. Затем выражаем x через t и вычисляем dx.

Как выбрать метод: краткая памятка

R(sin x, cos x)	t = tan(x/2) или специальные замены
$\sin^m x \cos^n x$	Выделить нечётный множитель / понизить степень
P(x) / Q(x)	Деление и простейшие дроби
Квадратный трёхчлен	Выделение полного квадрата
Дробные степени x	$x = t^k$

Вопросы для самоконтроля

01 Как работает универсальная замена $t = \tan(x/2)$?

02 Какие четыре типа простейших дробей выделяют?

03 Как применять метод неопределённых коэффициентов?

04 Зачем выделять полный квадрат?

05 Когда подстановка $x = t^k$ рационализует интеграл?

06 Как выбирать метод для $\sin^m x \cos^n x$?

Литература и итог

Результат: для каждого класса функций следует распознать структуру и выбрать подстановку или алгебраическое преобразование.

1. Н. М. Махмеджанов. Сборник заданий по высшей математике. Алматы, 2021.

2. Л. Д. Кудрявцев. Краткий курс математического анализа, т. 1–2.

3. П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. Высшая математика в упражнениях и задачах.

4. Б. П. Демидович. Сборник задач по математическому анализу.