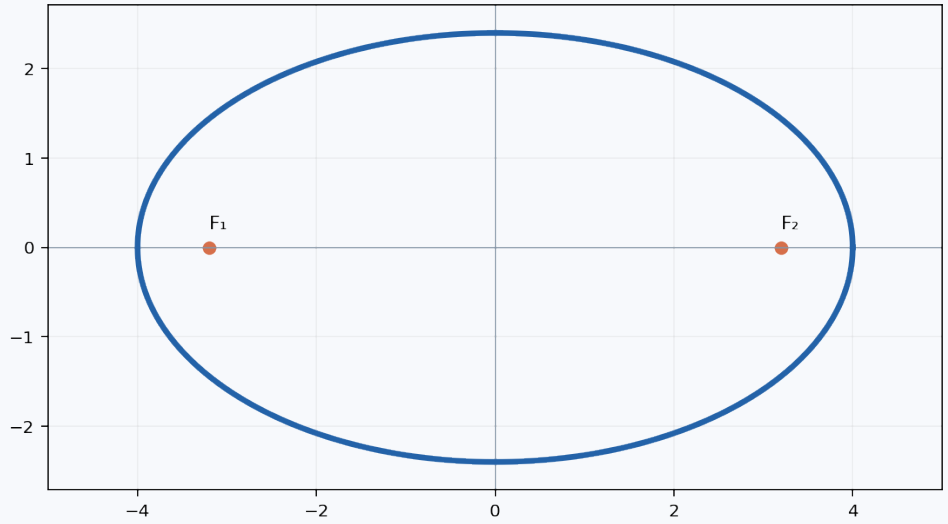
Линии и поверхности второго порядка

Эллипс • Гипербола • Парабола

Цилиндры • Конусы • Квадрики



Цель и план лекции

Разобрать геометрические определения и канонические уравнения кривых второго порядка.

Научиться находить фокусы, вершины, эксцентриситет и асимптоты.

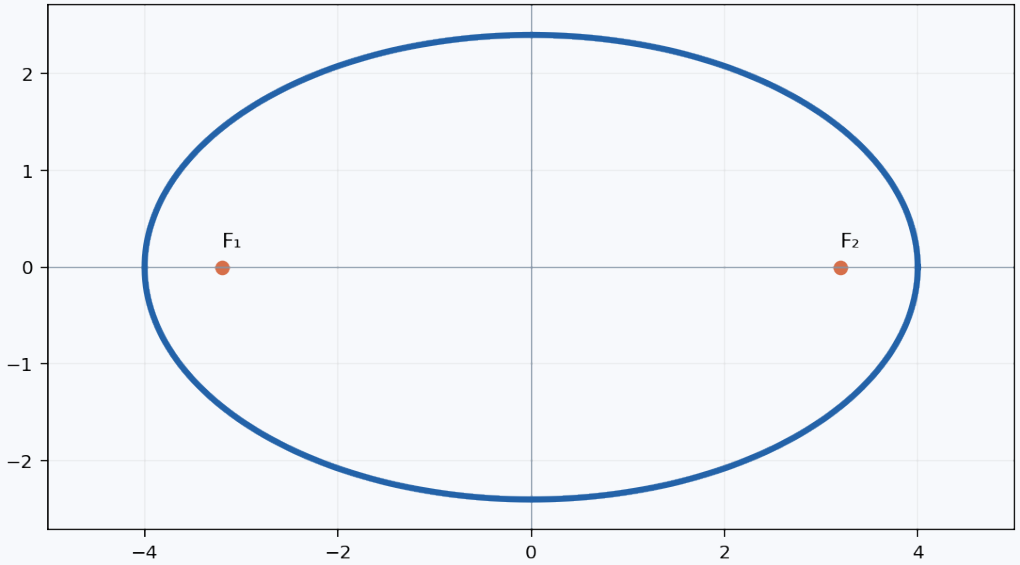
Познакомиться с цилиндрическими, коническими поверхностями и квадриками.

Эллипс: геометрическое определение

Эллипс — множество точек, сумма расстояний от которых до двух фокусов F_1 и F_2 постоянна.

$MF_1 + MF_2 = 2a$

Фокусы: $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, $a > c$.

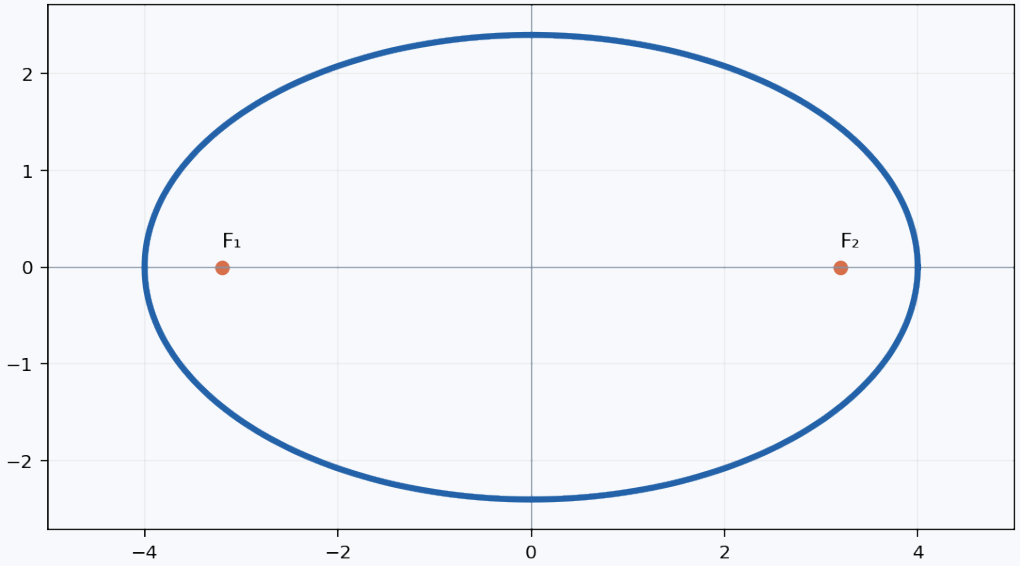


Каноническое уравнение эллипса

Полуоси: a — большая, b — малая.

Связь параметров: $b^2 = a^2 - c^2$.

Вершины: $(\pm a, 0)$, $(0, \pm b)$.



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

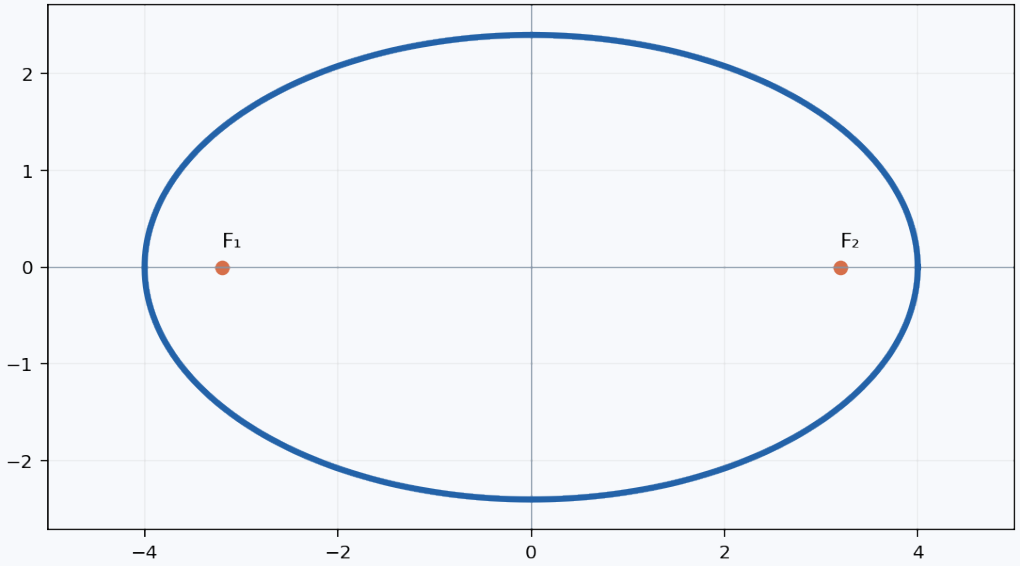
Эксцентриситет и директрисы эллипса

Эксцентриситет показывает отклонение эллипса от окружности.

$e = c/a, \quad 0 \le e < 1$

Директрисы (при $c > 0$): $x = \pm a^2/c$.

При $c = 0$ получаем окружность.



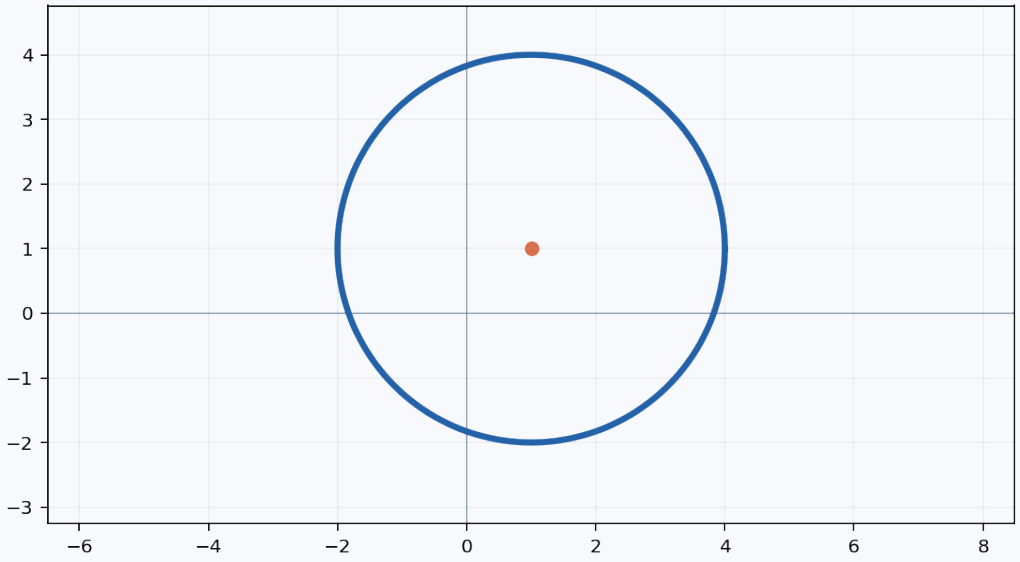
Окружность как частный случай

Если два фокуса эллипса совпадают, то a = b и e = 0.

$$x^2 + y^2 = a^2$$

Окружность с центром (x_0, y_0):

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$



Пример: уравнение окружности

Центр окружности M(3, 4); она проходит через O(0, 0).

Радиус $R = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

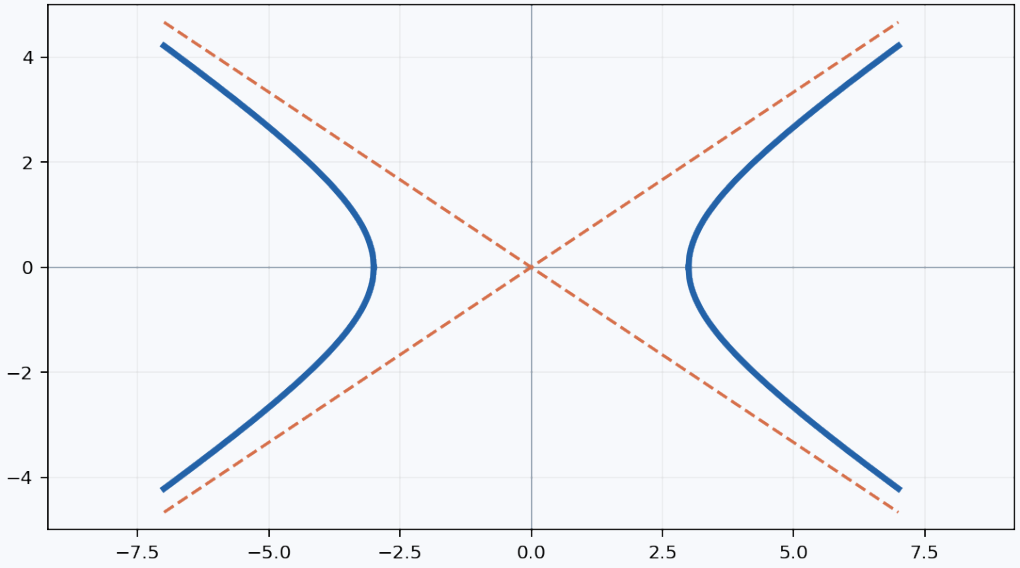
$$\mathbf{(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25}$$

Гипербола: геометрическое определение

Гипербола — множество точек, модуль разности расстояний до двух фокусов равен 2a.

$$|MF_1 - MF_2| = 2a$$

Фокусы: (±c, 0), причем c > a.

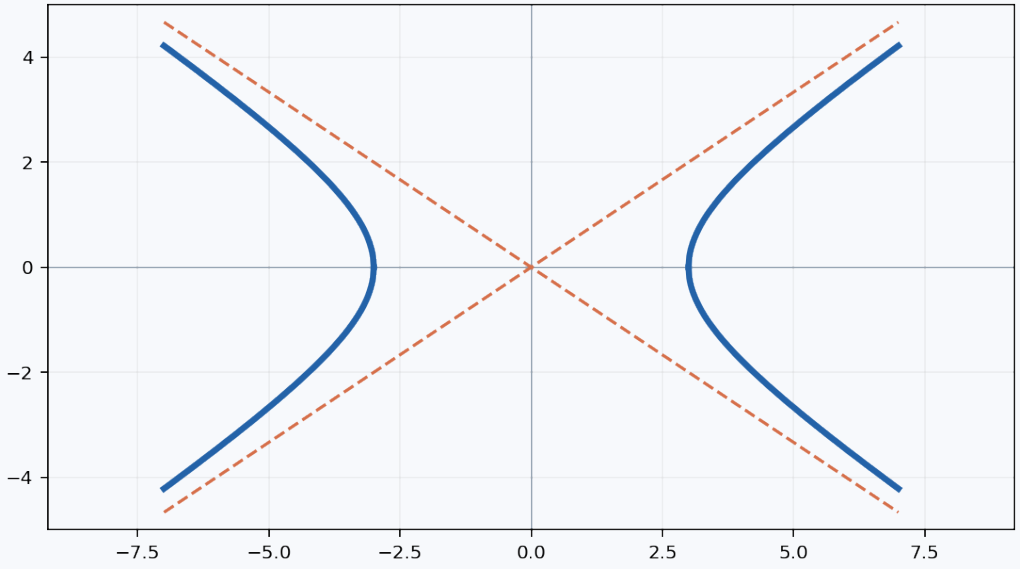


Каноническая гипербола

Параметры удовлетворяют $c^2 = a^2 + b^2$.

Вершины: $(\pm a, 0)$; пересечений с Oy нет.

$e = c/a > 1$



$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$

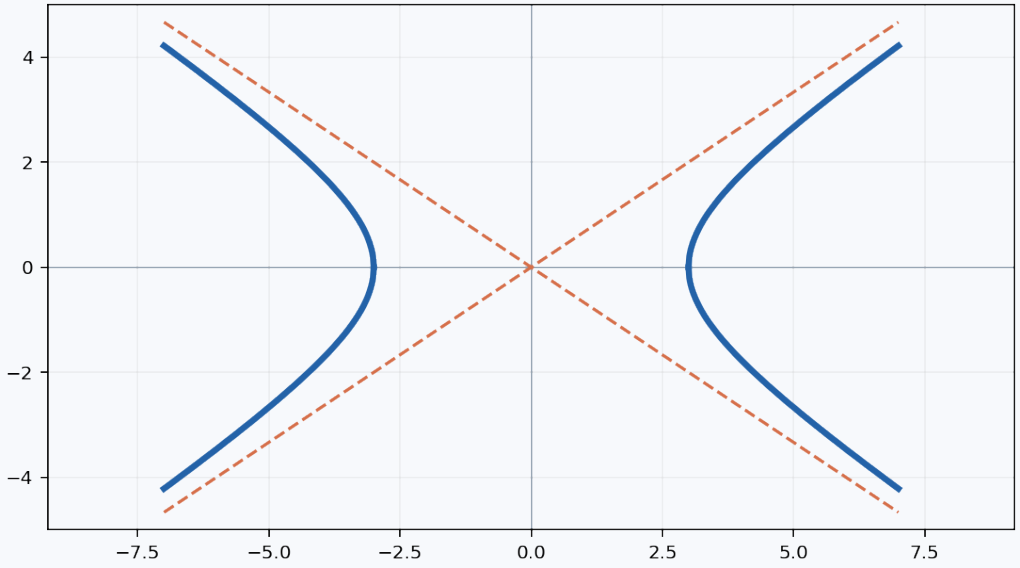
Асимптоты гиперболы

Ветви гиперболы приближаются к двум наклонным прямым.

y = (b/a)x

=y = −(b/a)x

Эти прямые проходят через центр гиперболы.



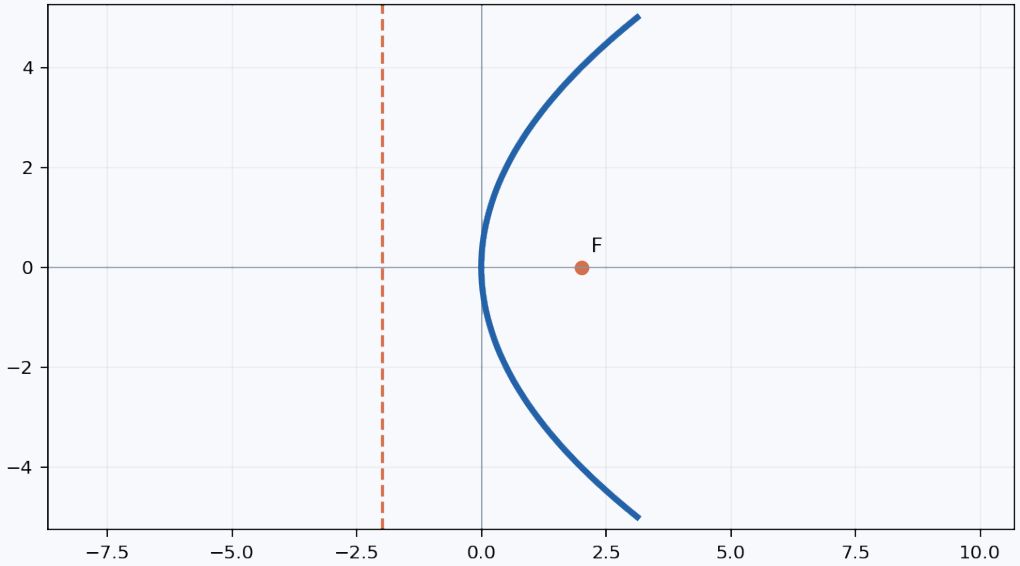
Парабола: фокус и директриса

Парабола — множество точек, равноудалённых от фокуса и директрисы.

Фокус F(p/2, 0), директриса x = −p/2.

Вершина O(0, 0), p > 0.

$$y^2 = 2px$$



Сравнение трёх кривых

Эллипс: сумма фокальных расстояний постоянна; $0 \le e < 1$.

Гипербола: модуль разности расстояний постоянен; $e > 1$.

Парабола: расстояния до фокуса и директрисы равны; $e = 1$.

Общее уравнение кривой 2-го порядка

В общем случае на плоскости кривая задаётся квадратным уравнением.

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Хотя бы один из A, B, C отличен от нуля.

Переход к каноническому виду выполняют переносом и поворотом осей.

Цилиндрические поверхности

Цилиндрическая поверхность образована прямыми, проходящими через направляющую кривую параллельно фиксированному направлению.

Примеры: эллиптический, гиперболический, параболический цилиндры.

Их уравнения не содержат координату вдоль образующих.

Примеры цилиндров

Эллиптический: $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

Гиперболический: $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$.

Параболический: $y^2 = 2px$.

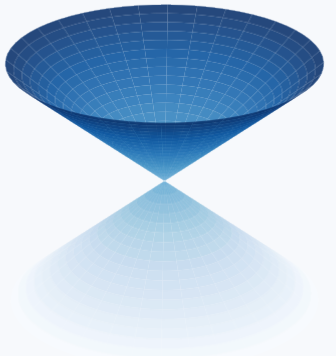
Свободная координата z описывает направление образующих.

Коническая поверхность

Образующие конуса — прямые, проходящие через фиксированную вершину и точки направляющей кривой.

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 0$$

Конус второго порядка имеет две полости с общей вершиной.



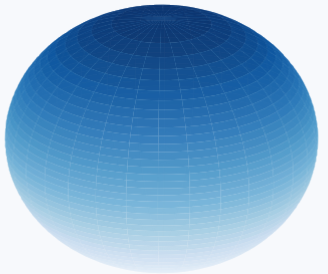
Эллипсоид

Замкнутая поверхность с тремя полуосями a, b, c

> 0.

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$$

Сечения координатными плоскостями — эллипсы.

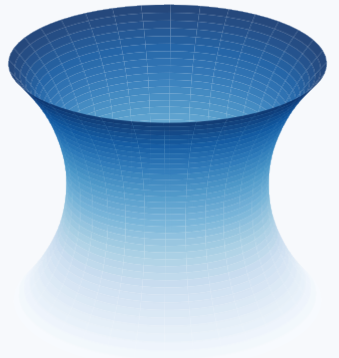


Однополостный гиперболоид

Связная поверхность с «перетяжкой».

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Горизонтальные сечения являются эллипсами.

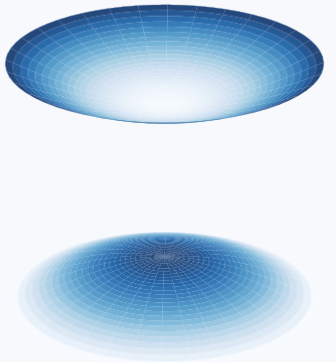


Двуполостный гиперболоид

Состоит из двух отдельных частей.

$$z^2/c^2 - x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$$

Точки поверхности удовлетворяют $|z| \geq c$.

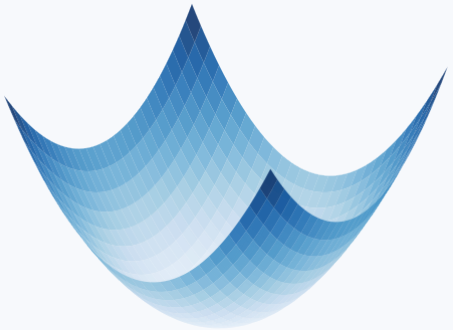


Эллиптический параболоид

Форма поверхности напоминает чашу.

$$z = x^2/(2p) + y^2/(2q)$$

При p, q > 0 поверхность направлена вверх.

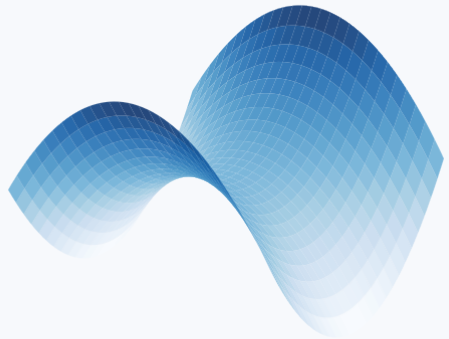


Гиперболический параболоид

Седловая поверхность: кривизна в двух главных направлениях имеет разные знаки.

$$z = x^2/(2p) - y^2/(2q)$$

Вертикальные сечения дают параболы разного направления.



Общее уравнение поверхности 2-го порядка

Общий вид квадратичного уравнения в пространстве:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz$$

$$=+ Gx + Hy + Iz + J = 0$$

При подходящем выборе координат уравнение можно упростить до канонического вида.

Как распознать поверхность

1. Определите, какие переменные входят в уравнение.

2. Проверьте знаки квадратов x^2, y^2, z^2.

3. Найдите сечения плоскостями $x = \text{const}$, $y = \text{const}$, $z = \text{const}$.

4. Сопоставьте с каноническими формами.

Вопросы для самоконтроля

Чем отличаются определения эллипса, гиперболы и параболы?

Как связаны a, b, c для эллипса и гиперболы?

Найдите асимптоты гиперболы $x^2/9 - y^2/4 = 1$.

Чем отличаются однополостный и двуполостный гиперболоиды?

Какая поверхность соответствует $z = x^2 - y^2$?

Литература

Александров П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — СПб.: Лань, 2009.

Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — М.: ФМЛ, 2004.

Индивидуальные задания по высшей математике / под ред. А. П. Рябушко. — Минск, 2009.

Махмеджанов Н., Махмеджанова Р. Н. Сборник задач по высшей математике, 2009.