ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Лекция 7.
Дифференциальные уравнения n-го порядка

Цель лекции

Познакомить студентов с дифференциальными уравнениями высшего порядка,с условиями существования единственного решения дифференциального уравнения n–го порядка,методами интегрирования и понижения порядка производной некоторых видов дифференциальных уравнений.

Основные вопросы

1. Понятия: обыкновенные дифференциальные уравнения высшего порядка, порядка дифференциального уравнения, решения дифференциального уравнения n–го порядка
2. Теорема существования и единственности решения
3. Дифференциальные уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$
4. Дифференциальные уравнения, не содержащие искомой функции
5. Дифференциальные уравнения, не содержащие независимой переменной
6. Дифференциальные уравнения, однородные относительно неизвестной функции и ее производных

Обыкновенные дифференциальные уравнения n–го порядка

Обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) n -го порядка - это уравнение, связывающее независимые переменные, неизвестную функцию и производные до порядка n. (или дифференциалы) этой функции и имеющая вид

$$F\left(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots y^{(n)}(x)\right) = 0$$

где независимая переменная $x \in I \subset D$, неизвестной функции $y(x) \in D \subset R^{n+1}$.

Наивысший порядок производной, входящей в уравнение, называется порядком дифференциального уравнения.

Решение дифференциального уравнения

Решением дифференциального уравнения является такая дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение вместо неизвестной функции превращает его в тождество

$$F\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \dots \varphi^{(n)}(x)\right) \equiv 0$$

Процесс нахождения решения дифференциального уравнения называется интегрированием дифференциального уравнения. Форма $\Phi(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0$ называется ***общим интегралом*** дифференциального уравнения n -го порядка

Теорема существования и единственности решения

Теорема. Существует единственное решение дифференциального уравнения $n-$ го порядка

$$y^{(n)} = f\left(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots y^{(n-1)}(x)\right)$$

удовлетворяющее условиям

Теорема существования и единственности решения

$$y(x_0) = y_0\,, y'(x_0) = y_1, y''(x_0) = y_2 \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}\,,$$

если в окрестности начальных значений $(x_0, y_0\,, y_1, \dots, y_{n-1}\,)$ функция f является непрерывной функцией всех своих аргументов и удовлетворяет условию Липшица по всем аргументам, начиная со второго.

Дифференциальные уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$

Решение этого уравнения находится путем интегрирования n раз:

$$y^{(n)} = f(x), \quad y^{(n-1)} = \int f(x)dx + c_1 = f_1(x) + c_1$$

$$y^{(n-2)} = \int (f_1(x) + c_1)dx + c_2 = f_2(x) + c_1 x + c_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y = f_n(x) + \frac{c_1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{c_2}{(n-2)!}x^{n-2} + \cdots + c_{n-1}x + c_n,$$

где $f_n(x) = \iiint \ldots \int f(x)dx^n$.

Дифференциальные уравнения ,не содержащие искомой функции

Порядок дифференциального уравнения вида:

$$F\left(x, y^{(k)}(x), y^{(k+1)}(x), \dots y^{(n)}(x)\right) = 0,$$

не содержащего искомой функции и ,возможно ,первых производных ,можно понизить ,взяв за новую неизвестную функцию низшую из производных уравнения .Положим $y^{(k)}(x) = z(x)$. Тогда получится уравнение меньшего порядка:

$$F\left(x, z(x), z'(x), z''(x), \dots z^{(n-k)}(x)\right) = 0$$

Дифференциальные уравнения ,не содержащие независимой переменной

Порядок дифференциального уравнения вида :

$$F\left(y(x), y'(x), y''(x), \dots y^{(n)}(x)\right) = 0 ,$$

не содержащего независимой переменной ,можно понизить, положив

$$y' = z ,$$

а за новую независимую переменную - переменную y

Дифференциальные уравнения ,однородные относительно неизвестной функции и ее производных

Порядок дифференциального уравнения вида :

$$F\left(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots y^{(n)}(x)\right) = 0\ ,$$

однородного относительно неизвестной функции и ее производных ,можно понизить ,сделав замену

$$\frac{y'}{y} = z,$$

где z - новая неизвестная функция .

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение дифференциального уравнения n -го порядка.

2 Что является порядком дифференциального уравнения n -го порядка?

3. Дайте определение общего решения и общего интеграла дифференциального уравнения n -го порядка.

4. Сформулируйте теорему существования и единственности решения дифференциального уравнения n–го порядка

5. Перечислите какие дифференциальные уравнения n -го порядка допускают понижения порядка производной

Литература

1. Петровский И Г .Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений .- М .: «Физматлит».– 2009.- 280 с

2. Н М .Матвеев .Дифференциальные уравнения .Изд.-3.е .Минск, Вышейш. школа, 1996, с .320-330.

3. Данко П Е ., Попов А Г ., Кожевникова Т Я .Высшая математика в упражнениях и задачах : Учебн. Пособие для студентов втузов .Ч II. – 4-е изд. М : Высш. шк., 1986г.

4. Степанов В В .Курс дифференциальных уравнений .М ., 1958, Изд.11, испр., обновл URSS. 2016. 512 с .ISBN 978-5-382-01622-1.

5. Л Э .Эльсгольц «Дифференциальные уравнения и вариационные исчисления», М .: Наука, 1969, с 15-24.

6. Филиппов А Ф .Сборник задач по дифференциальным уравнениям, М, Наука, 1973г .с.101-105

7. Краснов М Л ., Киселев А И ., Макаренко Г И .Обыкновенные дифференциальные уравнения : Задачи и примеры с подробными решениями, М .: Едиториал УРСС, 2002. — 256 с.