# ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

**Лекция 9.**

**Линейные неоднородные дифференциальные уравнения $n$-го порядка.**

**Метод вариации произвольных постоянных .**

# Цель лекции

Познакомить студентов с линейными неоднородными дифференциальными уравнениями n-го порядка,понять структуру его решения.Познакомить с методом вариации произвольных постоянных для нахождения частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка.

# Основные вопросы

1. Линейным неоднородным уравнением n-го порядка
2. Общее решение линейным однородным уравнением n-го порядка
3. Структура общего решения линейного неоднородного уравнения
4. Метод вариации произвольных постоянных
5. Метод вариации произвольных постоянных для поиска частного решения линейного неоднородного уравнения $2$-го порядка.

## Линейные неоднородные дифференциальные уравнения n-го порядка

Линейным неоднородным уравнением n-го порядка называется уравнение:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \quad (1)$$

т.е. уравнения с правой частью тождественно не равной нулю.

Линейные однородные дифференциальные уравнения n-го порядка – это уравнения вида

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$$

где $a_i(x), i = \overline{1;n}$ заданные функции.

# Структура общего решения линейного неоднородного уравнения

**Теорема.** Если $u = u(x)$ - частное решение неоднородного уравнения и является фундаментальной системой решений соответствующего однородного уравнения, то общее решение линейного неоднородного уравнения имеет вид:

$y = u + c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n;$

другими словами, общее решение неоднородного уравнения равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и любого частного решения рассматриваемого неоднородного уравнения: $y = u + y_{oo}.$

Следовательно, для построения общего решения неоднородного уравнения необходимо найти одно из его частных решений (при условии, что известно общее решение соответствующего ему однородного уравнения).

# Метод вариации произвольных постоянных

Этот метод используется для нахождения частного решения линейного неоднородного уравнения n-го порядка,как с переменными,так и с постоянными коэффициентами,если известно общее решение соответствующего однородного уравнения.Метод заключается в следующем.Предположим,что известна фундаментальная система решений $y_1(x), \dots y_n(x)$ соответствующего однородного уравнения.Тогда общее решение неоднородного уравнения следует искать в виде

$$u(x) = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 + \cdots + c_n(x)y_n,$$

где функции $c_1(x), .., c_n(x)$ новые неизвестные функции.

**Неизвестные функции $c_1(x), .., c_n(x)$ определяются из системы уравнений:**

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \ldots + C_n'(x)y_n = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \ldots + C_n'(x)y_n' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)} + C_2'(x)y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0, \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x), \end{cases}$$

функция $f(x)$ - правая часть уравнения.

# Метод вариации произвольных постоянных для поиска частного решения уравнения 2-го порядка

Для уравнения второго порядка $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$

система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases}$$

Решение этой системы находится с помощью формул

$$C_1(x) = -\int \frac{y_2 f(x)dx}{W(y_1, y_2)}; \qquad C_2(x) = -\int \frac{y_1 f(x)dx}{W(y_1, y_2)},$$

тогда $u(x)$ можно вычислить с помощью формулы

$$u(x) = -y_1 \int \frac{y_2 f(x)dx}{W(y_1, y_2)} + y_2 \int \frac{y_1 f(x)dx}{W(y_1, y_2)}.$$

Здесь $W(y_1, y_2)$ - вронскиан решений $y_1$ и $y_2$.

## Вопросы для самоконтроля

1. Какое уравнение называется линейным неоднородным уравнением $n$-го порядка?
2. Чему равно общее решение линейным однородным уравнением $n$-го порядка
3. Какова структура общего решения линейного неоднородного уравнения?
4. В чем заключается метод вариации произвольных постоянных?
5. Как находится частное решения линейного неоднородного уравнения $2$-го порядка.

## Литература


1. Петровский И Г .Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений .- М .:«Физматлит».– 2009.- 280 с

2. Н М .Матвеев .Дифференциальные уравнения .Изд .-3.е .Минск, Вышейш. школа, 1996, с .320-330.

3. Матвеев Н М .Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений .Минск, 1974.

4. . Л Э .Эльсгольц «Дифференциальные уравнения и вариационные исчисления», М .: Наука, 1969, с 15-24.

5. Филиппов А Ф .Сборник задач по дифференциальным уравнениям, М, Наука, 1973г. с. 101-105

6.. Краснов М Л ., Киселев А И ., Макаренко Г И .Обыкновенные дифференциальные уравнения :Задачи и примеры с подробными решениями, М .: Едиториал УРСС , 2002 .— 256 с .