ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Лекция 1.

Обыкновенные дифференциальные уравнения . Основные понятия и определения .Уравнения , разрешенные относительно производной . Уравнения 1-го порядка ,записанные в дифференциалах .

Цель лекции:

Познакомить студентов с основными понятиями:

- дифференциальные уравнения (ДУ);
- обыкновенные дифференциальные уравнения;
- простейшие типы дифференциальных уравнений, интегрируемых в квадратурах
- Рассмотреть примеры физических процессов, описываемых ДУ.

Основные вопросы:

1. Понятия: дифференциальных уравнений; обыкновенных дифференциальных уравнений; порядка дифференциального уравнения; решения дифференциального уравнения; уравнения I-ого порядка, разрешенного относительно производной; уравнения 1-го порядка, записанного в дифференциальной форме.
2. Задачи Коши; уравнения с разделенными и с разделяющимися переменными.
3. Уравнения, которые приводятся уравнение к уравнению с разделяющимися переменными.
4. Примеры задач с физическим содержанием, описываемых обыкновенным дифференциальным уравнениям

Краткое содержание

- **Дифференциальное уравнение** - это уравнение,связывающее независимые переменные,неизвестную функцию и производные (или дифференциалы)этой функции.Если неизвестная функция зависит от одной переменная,то уравнение называется **обыкновенным**; если она зависит от двух или более переменных, то уравнение называется дифференциальным **уравнением в частных производных**. Если неизвестной является вектор-функция,то имеем **систему дифференциальных уравнений**.
- **Обыкновенное дифференциальное уравнение** (ОДУ) — это уравнение,которое включает производные неизвестной функции по одной независимой переменной.
- **Порядок ОДУ** определяется как наивысший порядок производной,которая входит в уравнение.

ОДУ бывают:

- ***Однородные и неоднородные уравнения***. Однородное уравнение не содержит свободных членов,а в неоднородном присутствуют дополнительные функции, зависящие от неизвестной переменной,или константы.
- ***Уравнения с постоянными и переменными коэффициентами***. В уравнении с постоянными коэффициентами все коэффициенты остаются постоянными в процессе решения задачи.В уравнении с переменными коэффициентами хотя бы один коэффициент зависит от независимой переменной.

Решением дифференциального уравнения является такая дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение вместо неизвестной функции превращает его в тождество. Процесс нахождения решения дифференциального уравнения называется интегрированием дифференциального уравнения.

Уравнение I-ого порядка, разрешенное относительно производной имеет общий вид:

$$y' = f(x, y), \tag{1.1}$$

где $f(x, y)$ - это функция, которая зависит от переменной x и неизвестной функции $y(x)$, задана явно, определена и непрерывна в некоторой плоской области D.

Общее решение дифференциального уравнения первого порядка $y' = f(x, y)$ в области D - это функция $y = \varphi(x, C)$, обладающая следующими свойствами: 1) является решением этого уравнения при любом значении константы C, принадлежащей некоторому множеству; 2) для любого начального условия $y(x_0) = y_0$, так что $(x_0, y_0) \in D$, существует единственное значение $C = C_0$, при котором решение $y = \varphi(x, C_0)$ удовлетворяет заданному начальному условию.

Форма $\Phi(x, y, C) = 0$ называется ***общим интегралом*** дифференциального уравнения первого порядка $y' = f(x, y)$.

Любое решение $y = \varphi(x, C_0)$, полученное из общего решения $y = \varphi(x, C)$ при конкретном значении $C = C_0$, называется ***частным решением***.

Интеграл уравнения — это решение дифференциального уравнения, которое получается в результате интегрирования.
Для нахождения решения дифференциального уравнения используется операция интегрирования. Если в результате поиска решения дифференциального уравнения удается вычислить интеграл явно через элементарные функции, то говорят, что дифференциальные уравнения (1.1) или (1.3) **явно разрешимы**.
В противном случае, его решение записывается в виде интеграла, т.е. «**выражается в квадратурах**».
Будем говорить, что дифференциальное уравнение **интегрируемо в квадратурах**, если решение выражается через элементарные функции и квадратуры от явно заданных функций.

Дифференциальное уравнение первого порядка, записанное с помощью дифференциалов, имеет вид:

$$M(x,y)dy - N(x,y)dx = 0, \qquad (1.3)$$

где $M(x,y), N(x,y)$ - непрерывные функции, которые зависят от переменных x и y,

dx и dy - дифференциалы независимой и зависимой переменных соответственно.

Уравнение (1.3) называется **уравнением 1-го порядка в дифференциалах** или в дифференциальной форме.

Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка заключается в нахождении функции $y(x)$, которая удовлетворяет следующему уравнению:

$$F(x, y, y') = 0$$

и начальному условию:

$$y(x_0) = y_0$$

где $F(x, y, y') = 0$ - обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка,

y_0 - заданное значение функции y в точке x_0

x_0 - начальная точка, в которой задаются начальные условия.

Дифференциальный уравнение 1-ого порядка, записанное в стандартном виде, называется **уравнением с разделяющимися переменными**, если его правая часть представима как произведение двух функций, каждая из которых зависит только от одной переменной.

$$y' = f(x)g(y) \tag{3.1}$$

где $f(x)$ и $g(y)$ - заданные в области D, непрерывные функции.

Уравнение с разделяющимися переменными может быть записано в более общем виде:

$$f_1(x)g_1(y)dx = f_2(x)g_2(y)dy. \tag{3.4}$$

Уравнение (3.4) приводится к уравнению вида (3.1) путем деления на $f_1(x)g_2(y)$, где $f_1(x)g_2(y)$ не равно нулю.

Рассмотрим уравнение, которые приводится к уравнению с разделяющимися переменными:

$$y' = f(ax + by + c). \qquad (3.5)$$

Если b=0, то получаем вида $y' = \xi(x)$, интегрируемое в квадратурах;

если же a=0, то $y' = \eta(x)$ - с разделяющимися переменными;

если $a \neq 0$, $b \neq 0$, то замена $z = ax + by + c$, где $z(x)$ - новая функция, приводит уравнение (3.5) к уравнению с разделенными переменными:

$$\frac{dz}{bf(z) + a} = dx.$$

Примеры

- Пример1.**Уравнение радиоактивного распада**:
-
- $\frac{dx(t)}{dt} = -kx(t),$
- где:
- $x -$ количество неразложившегося вещества в момент времени t;
- $\frac{dx(t)}{dt} -$ скорость распада,пропорциональная количеству распадающегося вещества;
- $k -$постоянная распада.

Пример2.На основе **второго закона Ньютона** ($F = ma$) движение тела описывается дифференциальным уравнением:

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = F(t, x, v),$$

где:

m - масса тела,

F - суммарная сила,действующая на тело и зависит от времени,координаты и скорости.

Решение этого уравнения $x(t)$ есть математическая модель движения тела.

Пример 3.

Движение под действием силы тяжести.

Для свободного падения $F = mg$:

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2} = mg \quad \Longrightarrow \quad \frac{d^2y(t)}{dt^2} = g$$

Интегрируя дважды:

$$v(t) = gt + v(0), \qquad y(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_0$$

Здесь $v_0 = v(0)$ и $y_0 = y(0)$ — начальная скорость и высота.

Из этих примеров видно, что движение тела математически **описывается через дифференциальные уравнения**, которые связывают координату, скорость, ускорение и действующие силы.

Во всех этих примерах в качестве **показателя изменения фактор**а - движение тела - используется **производная**.

Выводы:

- Производные - это один из ключевых инструментов построения математических моделей в самых разных науках.
- Они позволяют описывать изменения величин во времени или пространстве,то есть динамику процессов.
- Все процессы окружающей нас действительности описываются дифференциальными уравнениями

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение дифференциального уравнения.
2. В чем отличие обыкновенного дифференциального уравнения и уравнения в частных производных?
3. Дайте определения общего решения и общего интеграла.
4. Как определяется порядок дифференциального уравнения?
5. Какое уравнение называется уравнением с разделяющимися переменными?
6. Напишите постановку задачи Коши для уравнения с разделяющимися переменными.
7. Как привести уравнение с разделяющимися переменными, записанное в общем виде к уравнению с разделенными переменными?
8. Напишите какая замена используется для уравнения вида:

$$y' = f(ax + by + c)?$$

Литература

1. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: «Физматлит».– 2009.- 280 с
2. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск, 1974
3. Л.Э. Эльсгольц «Дифференциальные уравнения и вариационные исчисления», М.: Наука, 1969, с 15-24.
4. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям, М, Наука, 1973г. с. 101-105
5. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения: Задачи и примеры с подробными решениями, М.: Едиториал УРСС, 2002.— 256 с.
6. Гутер Р.С., Янпольский А.Р. Дифференциальные уравнения. Учебное пособие для втузов. Изд.-2-е. М., «Высш. Школа», 1976, с. 304.