ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Лекция 8.

Линейные однородные дифференциальные уравнения

n-го порядка .

Фундаментальная система решений .

Формула Остроградского–Лиувилля

Цель лекции

Познакомить студентов с линейными однородными дифференциальными уравнениями n-го порядка, узнать структуру его решения. Познакомить с определителем Вронского, его применением.

Основные вопросы

1. Линейные однородные дифференциальные уравнения n-го порядка
2. Фундаментальная система решений уравнения
3. Связь вронскиана с первым коэффициентом $a_1(x)$этого уравнения
4. Формула Лиувилля - Остроградского
5. Интегрирование линейные однородные уравнения второго порядка,для которых известно одно частное решение

Линейные однородные дифференциальные уравнения n-го порядка

Линейные однородные дифференциальные уравнения n-го порядка – это уравнения вида

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \quad (1)$$

где $a_i(x), i = \overline{1;n}$ заданные функции.

Решения $y_1(x), \ldots y_k(x)$ называются линейно независимыми в промежутке I, если тождество

$$\alpha_1 y_1(x) + \cdots + \alpha_k y_k(x) \equiv 0, x \in I \ , \qquad (2)$$

возможно лишь в том случае, когда все постоянные $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ равны нулю. В противном случае (т.е. если тождество (2) выполняется при некоторых $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ среди которых хотя бы одно из чисел α_i отлично от нуля) решения называются линейно зависимыми.

Фундаментальная система решений уравнения

Теорема. Для того, чтобы «n» решений уравнения (1) были линейно зависимы на I необходимо и достаточно чтобы $W(x) = 0$.

Определение 2. Система $\{y_1(x), \dots y_n(x)\}$ n линейно независимых решений уравнения (1) называется фундаментальной системой решений.

Теорема 3. Если $p_i(x) \in C(I), i = 1, \dots, n$, то базис уравнения (1) существует.

Теорема 4. Если $y_1(x), \dots y_n(x)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (1), то общее решение уравнения (1) дается формулой

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x),$$

где $c_1, .., c_n$ – произвольные постоянные.

Следствие теоремы 4. Любые $n + 1$ решения уравнения $L(y) = 0$ линейно зависимы.

Связь вронскиана с первым коэффициентом $a_1(x)$ линейного дифференциального уравнения

Вронскиан n решений линейного однородного уравнения n -го порядка

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$$

связан с первым коэффициентом $a_1(x)$этого уравнения по формуле Лиувилля - Остроградского:

$$W(x) = W(x_0) \cdot \exp(-\int_{x_0}^{x} a_1(x)dx)$$

Так как из следствия теоремы 4 имеем

$$W'(x) + a_1(x)W(x) = 0$$

Совокупность n решений линейного однородного уравнения n-го порядка,определенных и линейно независимых на интервале, называются фундаментальной системой решений этого уравнения.

Формула Лиувилля - Остроградского

Формула Лиувилля - Остроградского.

$$W(x) = W(x_0) \cdot \exp(-\int_{x_0}^{x} a_1(x)dx)$$

Для линейного однородного уравнения второго порядка

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

фундаментальная система состоит из двух линейно независимых решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$; его общее решение вычисляется по формуле

$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$.

Интегрирование линейные однородные уравнения 2-го порядка, для которых известно одно частное решение

Если для такого уравнения известно одно частное решение $y_1(x)$, то его второе решение, линейно независимое от первого, может быть вычислено с помощью формулы (которая является следствием формулы Лиувилля и Остроградского)

$$y_2(x) = y_1(x) \int \left[{y_1}^{-2} \cdot \exp\left(-\int a_1(x)dx\right) \right] dx \qquad (1)$$

Это дает возможность интегрировать линейные однородные уравнения второго порядка, для которых известно одно частное решение, сразу без понижения его порядка.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие уравнения называются линейными однородные дифференциальными уравнениями n-го порядка?
2. Что такое фундаментальная система решений уравнения?
3. Как выражается связь вронскиана с первым коэффициентом $a_1(x)$ линейного уравнения?
4. Как используется формула Лиувилля – Остроградского?
5. Как найти общее решение линейные однородные уравнения второго порядка, для которых известно одно частное решение?

Литература

1. Петровский И Г .Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений .- М .:«Физматлит».– 2009.- 280 с

2. Н М .Матвеев .Дифференциальные уравнения .Изд .-3.е .Минск, Вышейш. школа, 1996, с .320-330.

3. Матвеев Н М .Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений .Минск, 1974.

4. . Л Э .Эльсгольц «Дифференциальные уравнения и вариационные исчисления», М .: Наука, 1969, с 15-24.

5. Филиппов А Ф .Сборник задач по дифференциальным уравнениям, М, Наука, 1973г. с. 101-105

6.. Краснов М Л ., Киселев А И ., Макаренко Г И .Обыкновенные дифференциальные уравнения :Задачи и примеры с подробными решениями, М .: Едиториал УРСС , 2002 .— 256 с .