ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Лекция 3.

Однородные уравнения .Уравнения , приводящиеся к однородным уравнениям .

Цель лекции

Познакомить студентов с теорией однородных и линейных дифференциальных уравнений,а также приводящиеся к ним уравнения.Познакомить студентов с уравнениями,в которые с помощью специальных замен переменных приводятся к линейным,однородным и уравнениям с разделяющимся переменными,а также с методами их интегрирования.

Основные вопросы

1. Однородные уравнения
2. Уравнения, приводящиеся к однородным
3. Обобщенно- однородные ОДУ
4. Линейные дифференциальные уравнения
5. Уравнение Бернулли
6. Уравнение Риккати
7. Уравнение Дарбу

Однородные уравнения

Дифференциальное уравнение 1-ого порядка, записанное в виде:

$$y' = \varphi(x, y)$$

называется однородным, если его правая часть $\varphi(x, y)$ есть однородная функция относительно своих аргументов нулевого измерения, т.е. имеет место тождество: $\varphi(tx, ty) = \varphi(x, y)$.

ОДУ в дифференциалах:

$$M(x, y)dy + N(x, y)dx = 0$$

называется однородным, если $M(x, y)$, $N(x, y)$ - однородные функции степени m, т.е. выполняются условия:

$$M(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m M(x, y),$$
$$N(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m N(x, y).$$

Интегрирование однородного уравнения

Подстановка $y = t \cdot x$ позволяет выразить производную неизвестной функции $y(x)$ через новую неизвестную функцию следующим образом:

$$\frac{dy}{dx} = t + x\frac{dt}{dx}.$$

Произведя замены переменных получим уравнение с разделенными переменными:

$$\frac{dt}{f(t) - t} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя правую и левую стороны уравнения, и с учетом подстановки получим общее решение исходного однородного уравнения.

Уравнения, приводящиеся к однородным

Уравнение вида

$$y' = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}, \qquad {c_1}^2 + {c_2}^2 \neq 0$$

это уравнение, которое не является однородным, если $c_1 \neq 0$ или $c_2 \neq 0$.

Однако, можно сделать сдвиг переменных x, y, и уравнение становится однородным, затем применяя стандартную замену для новых переменных решаем уравнение с разделяющимися переменными, возвращаем исходные переменные x, y.

Обобщенно- однородные ОДУ

Уравнение вида

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

называется обобщенно - однородным, если найдется такое число k, что уравнение становится однородным при замене $y = z^k$.

Осуществляя замену, получаем уравнение:

$$M\left(x, z^k\right)dx + N\left(x, z^k\right) \cdot K \cdot Z^{k-1}dz = 0,$$

которое будет однородным, если выполняются условия:

$$M\left(\lambda x, \lambda^k z^k\right) = \lambda^m M(x,z), \qquad N\left(\lambda x, \lambda^k z^k\right) = \lambda^{m-k+1} N(x,z)$$

Сделав замену $y = z^k$, где z - новая функция, а затем замену $\frac{z}{x} = u$, где u - новая функция, получим уравнение с разделяющимися переменными.

Линейные дифференциальные уравнения

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка — это уравнение вида:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x), \qquad x \in I$$

где $y = y(x)$ - неизвестная функция, $p(x)$ и $f(x)$ - заданные функции переменной $x \in I$(или постоянные), $\frac{dy}{dx}$ - производная функции y по x.

Таким образом,линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение,линейное относительно неизвестной функции и её производной,т.е.неизвестная функция и ее первая производная входит в уравнение в первой степени,без умножения друг на друга.

Уравнение Бернулли

Дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)y^n,$$

где $p(x)$ и $f(x)$ - непрерывные функции от x (или постоянные), а $n \neq 0$ и $n \neq 1$, называется уравнением Бернулли.

Это уравнение приводится к линейному с помощью замены $z = y^{1-n}$. Подставляя новую неизвестную функцию z и производную z' в уравнение, получим линейное уравнение относительно $z(x)$:

$$\frac{1}{1-n}z' + + p(x)z = f(x).$$

Найдя его общий интеграл и подставив вместо z выражение y^{1-n}, получим общий интеграл уравнения Бернулли

Уравнение Риккати

Дифференциальное уравнение первого порядка вида:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y + b(x)y^2 = f(x),$$

где $y = y(x)$ - неизвестная функция, $p(x), b(x)$ и $f(x)$ - заданные функции, $\frac{dy}{dx}$ - производная функции y по x, называется уравнением Риккати.

Уравнение Риккати можно преобразовать в уравнение Бернулли, если одно частное решение $y_1(x)$, положив $y(x) = y_1(x) + z(x)$, где $z(x)$ – новая неизвестная функция:

$$z' + [2b(x)y_1 + p(x)]z + b(x)z^2 = 0.$$

Уравнение Дарбу

Уравнением Дарбу называется уравнения вида:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy + P(x,y)[xdy - ydx] = 0,$$

где $M(x,y),\ N(x,y), P(x,y)$ – многочлены от x и y.

Уравнение Дарбу является обобщением уравнения Риккати. Поэтому в общем виде его решение не выражается через квадратуры, то есть интегралами.

Вопросы для самоконтроля

1. Какое уравнение называется однородным уравнением относительно своих аргументов?
2. Какая функция $f(x, y)$ называется однородной функцией размерности m?
3. Напишите уравнения, приводящиеся к однородным уравнениям.
4. Какое уравнение называется обобщенно-однородным уравнением?
5. Какая подстановка используется для решения однородных относительно переменных уравнений?
6. Какие замены переменных используются для решения дифференциальных уравнений ,приводящихся к однородным относительно переменных уравнений?

Литература

1. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: «Физматлит».– 2009.- 280 с
2. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск, 1974
3. Л.Э. Эльсгольц «Дифференциальные уравнения и вариационные исчисления», М.: Наука, 1969, с 15-24.
4. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям, М, Наука, 1973г. с. 101-105
5. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения: Задачи и примеры с подробными решениями, М.: Едиториал УРСС, 2002.— 256 с.
6. Гутер Р.С., Янпольский А.Р. Дифференциальные уравнения. Учебное пособие для втузов. Изд.-2-е. М., «Высш. Школа», 1976, с. 304.