ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Лекция 4.

Задача Коши и теорема существования и единственности .Линейные уравнения 1-го порядка. Уравнения ,приводящиеся к линейным уравнениям .

Цель лекции

Ставится задача Коши. Вопрос о том, когда решение существует, когда оно единственно, решается так называемыми теоремами существования и единственности. Эти теоремы очень важны как для самой теории, так и для практики. Более подробно рассмотреть линейные уравнения 1-го порядка и методы его решения.

Основные вопросы

1. Постановка задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка.
2. Постановка теоремы существования решения Задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка
3. Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения 1-го порядка,разрешенного относительно производной
4. Формулировка Теоремы Пикара
5. Теоремы о продолжении решения
6. Разрешимость линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка
7. Метод нахождения решение линейного неоднородного уравнения 1-го порядка

Задача Коши для ОДУ 1-го порядка

Задача Коши: Найти неизвестную функции $y(x)$, которая удовлетворяет следующему уравнению:

$$F(x, y, y') = 0$$

и начальному условию:

$$y(x_0) = y_0$$

где $F(x, y, y') = 0$ - обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка, y_0 - заданное значение функции y в точке x_0,
x_0 - начальная точка, в которой задаются начальные условия.
Задача Коши для уравнения, разрешенного относительно производной

$$y' = f(x, y)$$

состоит в нахождении решения, удовлетворяющего начальному условию:

$$y(x_0) = y_0$$

Теорема существования

Если в уравнении $y' = f(x, y)$ функция f определена и непрерывна в некоторой ограниченной области D плоскости (x, y), то для любой точки $(x_0, y_0) \in D$ существует решение $y(x)$ начальной задачи:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0,$$

определенное на некотором интервале, содержащем точку x_0.

Теоремы существования и единственности

Т1. Если $f(x,y)$ и $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ непрерывны в области, содержащей точку (x_0, y_0), то существует единственное решение задачи Коши в некоторой окрестности точки x_0.

Т2. Если функция f определена и непрерывна в некоторой ограниченной области D плоскости (x,y), причем она удовлетворяет в области D условию Липшица по переменной y, т.е.

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|,$$

где, L –положительная постоянная, то для любой точки (x_0, y_0) существует единственное решение $y(x)$ начальной задачи, определенное на некотором интервале, содержащем точку x_0.

Теорема Пикара

Если правая часть уравнения $y' = f(x, y)$ определена в прямоугольной области с центром в точке (x_0, y_0): $D = \{(x, y): |x - x_0| \leq a, | y - y_0| \leq$

Теоремы о продолжении решения

Т 1. При выполнении условий теоремы существования или теоремы существования и единственности всякое решение задачи Коши (2.1) с начальными данными $(x_0, y_0) \in D$ может быть продолжено до точки, сколь угодно близкой к границе области D. При этом в первом случае продолжение, вообще говоря, будет не обязательно единственным, во втором же случае оно единственно.

Т 2. Пусть дана задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

где функция $f(x, y)$ и её частная производная $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ непрерывны в некоторой области $D \subset R^2$, содержащей точку (x_0, y_0),

Теоремы о продолжении решения

Тогда:

Существует единственное решение

$y = \varphi(x)$, определённое в некоторой окрестности точки x_0.

Это решение можно продолжать шаг за шагом до тех пор, пока точка $(x, \varphi(x))$

остаётся внутри области D.

Если решение нельзя продолжить за пределы некоторой точки $x = x^*$, то:

- либо точка $(x^*, \varphi(x^*)$ покидает область D,
- либо функция $y = \varphi(x)$ стремится к бесконечности при приближении к x^*.

Линейные дифференциальные уравнения

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка — это уравнение вида:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x), \quad x \in I ,$$

где

$y = y(x)$ - неизвестная функция,

$p(x)$ и $f(x)$ - заданные функции переменной $x \in I$ или постоянные,

$\frac{dy}{dx}$ - производная функции y по x.

Линейные дифференциальные уравнения

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка — это уравнение вида:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x), \qquad x \in I$$

где $y = y(x)$ - неизвестная функция, $p(x)$ и $f(x)$ - заданные функции переменной $x \in I$(или постоянные), $\frac{dy}{dx}$ - производная функции y по x.

Таким образом,линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение,линейное относительно неизвестной функции и её производной,т.е.неизвестная функция и ее первая производная входит в уравнение в первой степени,без умножения друг на друга.

Метод вариации постоянной

С начала решается линейное **однородное уравнение**:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$$

и находится **общее решение однородного уравнения**:

$$y(x) = \mathrm{C}e^{-\int p(x)dx}$$

где C — константа.

Затем константа C **заменяется новой неизвестной функцией** $\mathrm{C}(x)$, чтобы учесть неоднородный член $f(x)$:

$$y(x) = \mathrm{C}(x)e^{-\int p(x)dx}.$$

Поиск функции $\mathrm{C}(x)$: подставляя это выражение в исходное уравнение, получим:

$$\mathrm{C}'(x)e^{-\int p(x)dx} = f(x)$$

Метод вариации постоянной

Находим $\mathrm{C}'(x)$:

$$\mathrm{C}'(x) = f(x)e^{\int p(x)dx}$$

Интегрируем:

$$\mathrm{C}(x) = \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_0$$

Подставляя $\mathrm{C}(x)$ обратно в $y(x)$, получим **общее решение линейного неоднородного уравнения первого порядка**

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left[\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_0\right]$$

Уравнение Бернулли

Дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)y^n,$$

где $p(x)$ и $f(x)$ - непрерывные функции от x (или постоянные), а $n \neq 0$ и $n \neq 1$, называется уравнением Бернулли.

Это уравнение приводится к линейному с помощью замены $z = y^{1-n}$. Подставляя новую неизвестную функцию z и производную z' в уравнение, получим линейное уравнение относительно $z(x)$:

$$\frac{1}{1-n}z' + + p(x)z = f(x).$$

Найдя его общий интеграл и подставив вместо z выражение y^{1-n}, получим общий интеграл уравнения Бернулли

Уравнение Риккати

Дифференциальное уравнение первого порядка вида:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y + b(x)y^2 = f(x),$$

где $y = y(x)$ - неизвестная функция, $p(x), b(x)$ и $f(x)$ - заданные функции, $\frac{dy}{dx}$ - производная функции y по x, называется уравнением Риккати.

Уравнение Риккати можно преобразовать в уравнение Бернулли, если одно частное решение $y_1(x)$, положив $y(x) = y_1(x) + z(x)$, где $z(x)$ – новая неизвестная функция:

$$z' + [2b(x)y_1 + p(x)]z + b(x)z^2 = 0.$$

Уравнение Дарбу

Уравнением Дарбу называется уравнения вида:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy + P(x,y)[xdy - ydx] = 0,$$

где $M(x,y),\ N(x,y), P(x,y)$ – многочлены от x и y.

Уравнение Дарбу является обобщением уравнения Риккати. Поэтому в общем виде его решение не выражается через квадратуры, то есть интегралами.

Вопросы для самоконтроля

1. Чем отличается дифференциальное уравнение от задачи Коши?
2. Напишите постановку задачи Коши для уравнения n-го порядка.
3. Сформулируйте Теорему существования и единственности.
4. Сформулируйте Теорему о продолжении решения.
5. Напишите условие Липшица?
6. Условия существования единственного решения линейного уравнения 1-го порядка?
7. Какое уравнение называется линейным?
8. В чем суть метода вариации постоянной?
9. Какое уравнение называется уравнением Бернулли?
10. К каким уравнениям приводятся уравнения Дарбу?
11. Какое уравнение называется уравнением Риккати?

Литература

1. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.- М.: «Физматлит». – 2009.- 280 с

2. Н.М. Матвеев. Дифференциальные уравнения. Изд.- 3.е. Минск, Вышейш. школа, 1996, с. 320-330.

3. Л.Э. Эльсгольц «Дифференциальные уравнения и вариационные исчисления», М.: Наука, 1969, с 15-24.

4. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям, М, Наука, 1973г. с. 101-105

5. А.В. Карташев, Б.Л. Рождественский «Обыкновенное дифференциальное уравнение и основы вариационного исчисления» М. Наука, 1976, 288с

6. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.

Минск, 1974